ମାଧ୍ୟମିକ ଜ୍ୟାମିତି

ଦଶମ ଶ୍ରେଣୀ

ମାଧ୍ୟମିକ ଶିକ୍ଷା ପରିଷଦ, ଓଡ଼ିଶା

ମାଧ୍ୟମିକ ଜ୍ୟାମିତି

ଦଶମ ଶ୍ରେଣୀ ନିମନ୍ତେ
ମାଧ୍ୟମିକ ଶିକ୍ଷା ପରିଷଦ, ଓଡ଼ିଶାଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଅନୁମୋଦିତ ଓ ପ୍ରକାଶିତ

© ସର୍ବସ୍ୱତ୍ୱ ସଂରକ୍ଷିତ

ଲେଖକମଣ୍ଡଳୀ :

ଡକ୍ଟର ଜଗନ୍ନାଥ ପ୍ରସାଦ ଦେବତା (ସମୀକ୍ଷକ)
ଶ୍ରୀ ମଦନ ମୋହନ ମହାନ୍ତି
ଶ୍ରୀ ନଗେନ୍ଦ୍ର କୁମାର ମିଶ୍ର
ବୀଣାପାଣି ପଣ୍ଡା
ଶ୍ରୀ ପ୍ରସନ୍ନ କୁମାର ମହାରଣା
ଡକ୍ଟର ନଳିନୀକାନ୍ତ ମିଶ୍ର (ସଂଯୋଜକ)

ପ୍ରଥମ ପ୍ରକାଶ : **୨୦୧୩**
୨୦୧୯

ଆର୍ଟପୁଲ୍ : **ଗ୍ରାଫ୍ ଏନ୍ ଗ୍ରାଫିକ୍ସ,** ଓଡ଼ିଆ ବଜାର, କଟକ

ମୁଦ୍ରଣ :

ମୂଲ୍ୟ :

ପ୍ରସ୍ତାବନା

ଆଜିର ଯୁଗ ହେଉଛି ବିଜ୍ଞାନ ଓ ପ୍ରଯୁକ୍ତି ବିଦ୍ୟାର ଯୁଗ । ତାତ୍ତ୍ୱିକ ଓ ପ୍ରୟୋଗାତ୍ମକ – ଏ ଉଭୟ ଦିଗରେ ବିଜ୍ଞାନର ଅଗ୍ରଗତି ନିମନ୍ତେ ଗଣିତ ଶାସ୍ତ୍ରର ଏକ ବଳିଷ୍ଠ ଭୂମିକା ରହିଛି । ଗଣିତ ଶାସ୍ତ୍ରର ଜ୍ୟାମିତି ହେଉଛି ଏକ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ଅଙ୍ଗ । ବିଦ୍ୟାଳୟ ସ୍ତରରୁ ଜ୍ୟାମିତି ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ଏକ ଉପଯୁକ୍ତ ଭିତ୍ତିଭୂମି ଉପରେ ପ୍ରତିଷ୍ଠିତ ହେବା ବାଞ୍ଛନୀୟ ।

ସାରା ବିଶ୍ୱରେ ଅନ୍ୟାନ୍ୟ ବିକାଶଶୀଳ ଦେଶମାନଙ୍କ ଭଳି ଭାରତ ମଧ୍ୟ ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଉଲ୍ଲେଖନୀୟ ଭୂମିକା ଗ୍ରହଣ କରିଛି । ମାଧ୍ୟମିକ ଶିକ୍ଷାସ୍ତର ପାଇଁ ଜାତୀୟ ସ୍ତରରେ ପ୍ରସ୍ତୁତ National Curriculum Frame Work - 2005 ରେ ଗଣିତ ଶିକ୍ଷାକୁ ଅଧିକ ଗୁରୁତ୍ୱ ଦିଆଯାଇଛି । ତଦନୁଯାୟୀ ଜାତୀୟ ଶିକ୍ଷା ଗବେଷଣା ଓ ତାଲିମ ପରିଷଦ (NCERT), ପାଠ୍ୟଖସଡ଼ା ଓ ପାଠ୍ୟପୁସ୍ତକ ପ୍ରଣୟନ କରିଛନ୍ତି । ଜାତୀୟ ଶିକ୍ଷାସ୍ରୋତକୁ ଦୃଷ୍ଟି ଦେଇ ଓଡ଼ିଶା ମାଧ୍ୟମିକ ଶିକ୍ଷା ପରିଷଦ, State Curriculum Framework-2007 ଅନୁଯାୟୀ ଦଶମ ଶ୍ରେଣୀ ପାଇଁ ସିଲାବସ୍ ପ୍ରସ୍ତୁତ କରି ତଦନୁଯାୟୀ ନୂତନ ଭାବରେ **ମାଧ୍ୟମିକ ଜ୍ୟାମିତି** ପାଠ୍ୟପୁସ୍ତକ ପ୍ରକାଶ କରିଛନ୍ତି । ପ୍ରକାଶ ଥାଉ କି, 2012-13 ଶିକ୍ଷାବର୍ଷ ପାଇଁ ଉକ୍ତ ପାଠ୍ୟଖସଡ଼ା ଅନୁଯାୟୀ ନବମ ଶ୍ରେଣୀ ନିମିତ୍ତ ମାଧ୍ୟମିକ ଜ୍ୟାମିତି ପାଠ୍ୟପୁସ୍ତକ ପ୍ରକାଶିତ ହୋଇଯାଇଛି ।

ଅଭିଜ୍ଞ ଲେଖକମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ପାଠ୍ୟପୁସ୍ତକ ରଚନା କରାଯାଇ ପୁସ୍ତକର ପାଣ୍ଡୁଲିପିକୁ ସିଲାବସ୍‌କମିଟିରେ ପଠିତ ଓ ଆଲୋଚିତ ହୋଇଛି । ଆଲୋଚନା ଲବ୍ଧ ପରାମର୍ଶକୁ ପାଥେୟ କରି ପାଣ୍ଡୁଲିପିଟି ସଂଶୋଧିତ ହୋଇଛି ।

ଏହି ପୁସ୍ତକ ପ୍ରସ୍ତୁତିରେ ଆନ୍ତରିକ ସହଯୋଗ କରିଥିବାରୁ ମୁଁ ଲେଖକମଣ୍ଡଳୀ, ସମୀକ୍ଷକ ଓ ସଂଯୋଜକଙ୍କୁ ଧନ୍ୟବାଦ ଜଣାଉଛି । ଆଶା କରୁଛି, ପୁସ୍ତକଟି ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀ ତଥା ଶିକ୍ଷକ–ଶିକ୍ଷୟିତ୍ରୀଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଆଦୃତ ହେବ ।

ସଭାପତି

ମାଧ୍ୟମିକ ଶିକ୍ଷା ପରିଷଦ, ଓଡ଼ିଶା

ମୁଖବନ୍ଧ

ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀଙ୍କର ଗଣିତ ଶିକ୍ଷାକୁ ଶୈଶବ କାଳରୁ ହିଁ ପ୍ରାଧାନ୍ୟ ଦିଆଯାଇ ଆସୁଛି । କାରଣ ଏହା ଶିଶୁର ଉପଯୁକ୍ତ ବୌଦ୍ଧିକ ବିକାଶ କରିବା ସଙ୍ଗେ ସଙ୍ଗେ ତାକୁ ଯୁକ୍ତିସଙ୍ଗତ ଚିନ୍ତାଧାରା ଓ ନିରପେକ୍ଷ ବିଚାର ସମ୍ପନ୍ନ କରିଥାଏ । ସଭ୍ୟତାର ଅଗ୍ରଗତି ସଙ୍ଗେ ସଙ୍ଗେ ନୂତନ ବୈଜ୍ଞାନିକ ଗବେଷଣା ଲବ୍‌ଧ ଜ୍ଞାନର ପ୍ରଭାବ ଶିକ୍ଷାଦାନ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଉପଲବ୍‌ଧ ହେଉଛି । ଏହି ପରିପ୍ରେକ୍ଷୀରେ ମାଧ୍ୟମିକ ସ୍ତରରେ ଗଣିତ ଶିକ୍ଷାଦାନର ବିଷୟ ଓ ଉପସ୍ଥାପନା ଶୈଳୀ ମଧ୍ୟ ପ୍ରଭାବିତ ହୋଇଛି ।

ଏହାକୁ ହୃଦୟଙ୍ଗମ କରି ଜାତୀୟ ଶିକ୍ଷା ଗବେଷଣା ଓ ତାଲିମ ପରିଷଦ (NCERT) ଦ୍ୱାରା ସର୍ବଭାରତୀୟ ସ୍ତରରେ ପ୍ରସ୍ତୁତ National Curriculum Frame Work - 2005 ଓ ପ୍ରାଦେଶିକ ସ୍ତରରେ State Curriculum Framework-2007 କୁ ନେଇ ପ୍ରସ୍ତୁତ Syllabus କୁ ଭିତ୍ତିକରି ଓଡ଼ିଶା ମାଧ୍ୟମିକ ଶିକ୍ଷା ପରିଷଦ ଗଣିତ ପାଠ୍ୟଖସଡ଼ାର ନବୀକରଣ କରିଛନ୍ତି । ଏହି ନୂତନ ପାଠ୍ୟ ଖସଡ଼ା ଅନୁଯାୟୀ ମାଧ୍ୟମିକ ଜ୍ୟାମିତି (ଦଶମ ଶ୍ରେଣୀ) ପାଠ୍ୟପୁସ୍ତକ ପ୍ରକାଶ କରିଛନ୍ତି ।

ପୂର୍ବରୁ ନୂତନ ଭାବରେ ପ୍ରକାଶିତ ‘ସରଳ ଜ୍ୟାମିତି’ (ଅଷ୍ଟମ ଶ୍ରେଣୀ) ଓ ‘ମାଧ୍ୟମିକ ଜ୍ୟାମିତି’ (ନବମ ଶ୍ରେଣୀ)ରେ ଅନୁସୃତ ନୂତନ ଉପସ୍ଥାପନା ଶୈଳୀକୁ ଦଶମ ଶ୍ରେଣୀର ‘ମାଧ୍ୟମିକ ଜ୍ୟାମିତି’ ପୁସ୍ତକରେ ଅବ୍ୟାହତ ରଖାଯାଇଛି । ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅଧ୍ୟାୟରେ ଆଲୋଚନା ଶେଷରେ ସୁଚିନ୍ତିତ ଉଦାହରଣ ଦିଆଯିବା ସଙ୍ଗେ ସଙ୍ଗେ ବସ୍ତୁନିଷ୍ଠ, ସଂକ୍ଷିପ୍ତ ଓ ଦୀର୍ଘ ଉତ୍ତରମୂଳକ ପ୍ରଶ୍ନସବୁ ସରଳରୁ କଠିନ କ୍ରମରେ ରଖି ଅନୁଶୀଳନୀରେ ଦିଆଯାଇଛି । ତ୍ରିଭୁଜରେ ସାଦୃଶ୍ୟ, ବୃତ୍ତ ଓ ସ୍ପର୍ଶକ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଆଲୋଚନା ବେଳେ କେତେକ ଉପାଦେୟ ତଥ୍ୟକୁ 15 ଗୋଟି ଉପପାଦ୍ୟ (Theorem) ଆକାରରେ ସ୍ଥାପିତ କରାଯାଇଛି । ପରୀକ୍ଷା ଦୃଷ୍ଟିରୁ ଏଗୁଡ଼ିକ ବିଶେଷଗୁରୁତ୍ୱ ବହନ କରେ । ଅନ୍ୟ କେତେକ ଜ୍ଞାତବ୍ୟ ତଥ୍ୟକୁ ଉପପାଦ୍ୟ ଶ୍ରେଣୀଭୁକ୍ତ କରା ନଯାଇ ସେଗୁଡ଼ିକୁ ପ୍ରମେୟ ରୂପେ ନାମିତ କରି ପୁସ୍ତକରେ ସ୍ଥାନିତ କରାଯାଇଛି । ଜ୍ୟାମିତିକ ଅବଧାରଣାର ପରିପୁଷ୍ଟତା ପାଇଁ ଉଭୟ ପ୍ରକାର ତଥ୍ୟ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ଅଟେ । ଆଲୋଚିତ କେତେକ ଉପପାଦ୍ୟର ପ୍ରମାଣ ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ବହିର୍ଭୁକ୍ତ ଥିବାରୁ ଆଗ୍ରହୀ ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀଙ୍କ ନିମନ୍ତେ ପ୍ରମାଣ ଗୁଡ଼ିକୁ ଅଧ୍ୟାୟ ଶେଷରେ ‘ପରିଶିଷ୍ଟ’ରେ ଦିଆଯାଇଛି । ଆଶାକରାଯାଉଛି, ଯେଉଁମାନଙ୍କ ଲାଗି ପୁସ୍ତକଟି ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସେମାନେ ପୁସ୍ତକରେ ସନ୍ନିବେଶିତ ନୂତନ ଚିନ୍ତାଧାରା ସହିତ ନିଜକୁ ପରିଚିତ କରାଇ ଉପକୃତ ହେବେ ।

ପୁସ୍ତକଟିକୁ ତ୍ରୁଟିଶୂନ୍ୟ କରିବାର ସମସ୍ତ ଉଦ୍ୟମ ସତ୍ତ୍ୱେ ଯଦି ଏଥିରେ କୌଣସି ପ୍ରକାର ତ୍ରୁଟି ପରିଲକ୍ଷିତ ହୁଏ ତାହାପ୍ରତି କର୍ତ୍ତୃପକ୍ଷଙ୍କ ଦୃଷ୍ଟି ଆକର୍ଷଣ କରାଗଲେ ପରବର୍ତ୍ତୀ ସଂସ୍କରଣରେ ସେଗୁଡ଼ିକର ସଂଶୋଧନ କରିବା ପାଇଁ ଆବଶ୍ୟକ ପଦକ୍ଷେପ ନିଆଯିବ ।

ଲେଖକମଣ୍ଡଳୀ

ସୂଚୀ

ଅଧ୍ୟାୟ	ବିଷୟ	ପୃଷ୍ଠା
ପ୍ରଥମ ଅଧ୍ୟାୟ :	ଜ୍ୟାମିତିରେ ସାଦୃଶ୍ୟ	1-36
ଦ୍ୱିତୀୟ ଅଧ୍ୟାୟ :	ବୃତ୍ତ	37-73
ତୃତୀୟ ଅଧ୍ୟାୟ :	ବୃତ୍ତର ସ୍ପର୍ଶକ	74-94
ଚତୁର୍ଥ ଅଧ୍ୟାୟ :	ତ୍ରିକୋଣମିତି	95-118
ପଞ୍ଚମ ଅଧ୍ୟାୟ :	ପରିମିତି	119-163
ଷଷ୍ଠ ଅଧ୍ୟାୟ :	ଅଙ୍କନ	164-182
	ଉତ୍ତରମାଳା	183-186

ଭାରତର ସମ୍ବିଧାନ

ପ୍ରାକ୍ କଥନ :

ଆମେ ଭାରତବାସୀ ଭାରତକୁ ଏକ ସାର୍ବଭୌମ, ସମାଜବାଦୀ, ଧର୍ମ ନିରପେକ୍ଷ, ଗଣତାନ୍ତ୍ରିକ ସାଧାରଣତନ୍ତ୍ର ରୂପେ ଗଠନ କରିବା ପାଇଁ ଦୃଢ଼ ସଂକଳ୍ପ ନେଇ ଓ ଏହାର ସମସ୍ତ ନାଗରିକଙ୍କୁ

- ସାମାଜିକ, ଅର୍ଥନୈତିକ ଓ ରାଜନୈତିକ ନ୍ୟାୟ ;
- ଚିନ୍ତା, ଅଭିବ୍ୟକ୍ତି, ପ୍ରତ୍ୟୟ, ଧର୍ମୀୟ ବିଶ୍ୱାସ ଏବଂ ଉପାସନାର ସ୍ୱତନ୍ତ୍ରତା;
- ସ୍ଥିତି ଓ ସୁବିଧା ସୁଯୋଗର ସମାନତାର ସୁରକ୍ଷା ପ୍ରଦାନ କରିବାକୁ ତଥା
- ବ୍ୟକ୍ତି ମର୍ଯ୍ୟାଦା ଏବଂ ରାଷ୍ଟ୍ରର ଐକ୍ୟ ଓ ସଂହତି ନିଶ୍ଚିତ କରି ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ

ଭ୍ରାତୃଭାବ ଉତ୍ସାହିତ କରିବାକୁ

ଏହି ୧୯୪୯ ମସିହା ନଭେମ୍ବର ୨୬ ତାରିଖ ଦିନ

ଆମର ସଂବିଧାନ ପ୍ରଣୟନ ସଭାରେ ଏତଦ୍ୱାରା

ଏହି ସମ୍ବିଧାନକୁ ଗ୍ରହଣ ଓ ପ୍ରଣୟନ କରୁଅଛୁ ଏବଂ ଆମ ନିଜକୁ ଅର୍ପଣ କରୁଅଛୁ ।

ଚତୁର୍ଥ ଅଧ୍ୟାୟ (କ)

୫୧(କ) ଧାରା : ମୌଳିକ କର୍ତ୍ତବ୍ୟ

ଭାରତର ପ୍ରତ୍ୟେକ ନାଗରିକଙ୍କର କର୍ତ୍ତବ୍ୟ –

(କ) ସମ୍ବିଧାନକୁ ମାନି ଚଳିବା ଏବଂ ଏହାର ଆଦର୍ଶ ଓ ଅନୁଷ୍ଠାନମାନଙ୍କୁ ଏବଂ ଜାତୀୟ ପତାକା ଓ ଜାତୀୟ ସଙ୍ଗୀତକୁ ସମ୍ମାନ ପ୍ରଦର୍ଶନ କରିବା;

(ଖ) ଯେଉଁସବୁ ମହନୀୟ ଆଦର୍ଶ ଆମ ଜାତୀୟ ସ୍ୱାଧୀନତା ସଂଗ୍ରାମକୁ ଅନୁପ୍ରାଣିତ କରିଥିଲା, ତାହାକୁ ସ୍ମରଣ ଓ ଅନୁସରଣ କରିବା;

(ଗ) ଭାରତର ସାର୍ବଭୌମତ୍ୱ, ଏକତା ଓ ସଂହତି ବଜାୟ ଏବଂ ସୁରକ୍ଷିତ ରଖିବା;

(ଘ) ଦେଶର ପ୍ରତିରକ୍ଷା କରିବା ଓ ଆବଶ୍ୟକ ସ୍ଥଳେ ଜାତୀୟ ସେବା ପ୍ରଦାନ କରିବା;

(ଙ) ଧର୍ମଗତ, ଭାଷାଗତ ଏବଂ ଆଞ୍ଚଳିକ କିମ୍ବା ଗୋଷ୍ଠୀଗତ ବିଭିନ୍ନତାକୁ ଅତିକ୍ରମ କରି ଭାରତର ଜନସାଧାରଣଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଐକ୍ୟ ଓ ଭ୍ରାତୃଭାବ ପ୍ରତିଷ୍ଠା କରିବା ଏବଂ ନାରୀଜାତିର ମର୍ଯ୍ୟାଦାହାନୀସୂଚକ ବ୍ୟବହାର ପରିତ୍ୟାଗ କରିବା;

(ଚ) ଆମର ସଂସ୍କୃତିର ମୂଲ୍ୟବାନ ଐତିହ୍ୟକୁ ସମ୍ମାନ ପ୍ରଦର୍ଶନ ଓ ସଂରକ୍ଷଣ କରିବା;

(ଛ) ଅରଣ୍ୟ, ହ୍ରଦ, ନଦୀ, ବନ୍ୟପ୍ରାଣୀ ସମେତ ପ୍ରାକୃତିକ ପରିବେଶର ସୁରକ୍ଷା ଓ ଉନ୍ନତି କରିବା ଏବଂ ଜୀବଜଗତ ପ୍ରତି ଅନୁକମ୍ପା ପ୍ରଦର୍ଶନ କରିବା;

(ଜ) ବୈଜ୍ଞାନିକ ମନୋଭାବ, ମାନବବାଦ ଏବଂ ଅନୁସନ୍ଧିତ୍ସା ଓ ସଂସ୍କାର ମନୋଭାବ ପୋଷଣ କରିବା;

(ଝ) ସର୍ବସାଧାରଣ ସମ୍ପତ୍ତିର ସୁରକ୍ଷା କରିବା ଓ ହିଂସା ପରିତ୍ୟାଗ କରିବା;

(ଞ) ବ୍ୟକ୍ତିଗତ ଓ ସମଷ୍ଟିଗତ କାର୍ଯ୍ୟାବଳୀର ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଉତ୍କର୍ଷ ସାଧନ କରିବା, ଯାହା ଦ୍ୱାରା ଆମ ଦେଶ ପ୍ରଚେଷ୍ଟା ଓ କୃତିତ୍ୱର ଉଚ୍ଚତର ସୋପାନକୁ ଅବିରତ ଉନ୍ନତି କରିପାରିବ;

(ଟ) ମାତା ବା ପିତା ବା ଅଭିଭାବକ, ତାଙ୍କର ଛଅ ବର୍ଷରୁ ଚଉଦ ବର୍ଷ ବୟସ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସନ୍ତାନ ବା ପାଳିତଙ୍କୁ ଶିକ୍ଷାଲାଭର ସୁଯୋଗ ଯୋଗାଇ ଦେବା ।

ପ୍ରଥମ ଅଧ୍ୟାୟ

ଜ୍ୟାମିତିରେ ସାଦୃଶ୍ୟ

(SIMILARITY IN GEOMETRY)

1.1 ଉପକ୍ରମଣିକା :

ଅନେକ ସମୟରେ ଦୁଇଟି ବସ୍ତୁ ବା ଚିତ୍ରକୁ ଦେଖି, ‘‘ସେ ଦୁଇଟି ଦେଖିବାକୁ ଏକାଭଳି’’ ବୋଲି ଆମେ କହିଥାଉ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ (i) କାନ୍ଥରେ ଟଙ୍ଗା ଯାଇଥିବା ଗୋଟିଏ ବୃହତ୍ ଆକାରର ଏବଂ ଗୋଟିଏ କ୍ଷୁଦ୍ର ଆକାରର ଓଡ଼ିଶାର ମାନଚିତ୍ର, (ii) ‘ତାଜମହଲ୍’ ଏବଂ ବଜାରରେ ମିଳୁଥିବା ‘ତାଜମହଲ୍‌ର ଏକ ନମୁନା’ । (iii) ଗୋଟିଏ ନେଗେଟିଭରୁ ପ୍ରସ୍ତୁତ ଗୋଟିଏ ବଡ଼ ଫଟୋଚିତ୍ର ଏବଂ ଗୋଟିଏ ଛୋଟ ଫଟୋଚିତ୍ର ଇତ୍ୟାଦି ।

ଏପରି ଦୁଇଟି ଚିତ୍ର କାହିଁକି ଏକା ଭଳି ଦେଖାଯାଏ କହି ପାରିବ କି ?

ଓଡ଼ିଶାର ଗୋଟିଏ ବଡ଼ ମାନଚିତ୍ର (ମାନଚିତ୍ର I) ଯେଉଁଥିରେ ରାଉରକେଲା, ପାରାଦ୍ୱୀପ ଓ ଗୋପାଳପୁର ତଥା ସମସ୍ତ ଜିଲ୍ଲାର ମୁଖ୍ୟ ସହର ଗୁଡ଼ିକ ଦର୍ଶାଯାଇଥିବ ଏବଂ ପୂର୍ବମାନଚିତ୍ରର ଏକ ଛୋଟ ଆକାରର ମାନଚିତ୍ର (ମାନଚିତ୍ର II) ଯେଉଁଥିରେ ପୂର୍ବୋକ୍ତ ସ୍ଥାନଗୁଡ଼ିକ ଦର୍ଶାଯାଇଥିବ ସଂଗ୍ରହ କରିବା । ମାନଚିତ୍ର - I ଓ ମାନଚିତ୍ର - II ରୁ ରାଉରକେଲା-ପାରଦ୍ୱୀପ ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ଦୂରତା ପୃଥକ୍ ଭାବେ ମାପି ଦୂରତା ଦ୍ୱୟର ଅନୁପାତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା । ସେହିପରି ପାରାଦ୍ୱୀପ-ଗୋପାଳପୁର ଓ ଗୋପାଳପୁର - ରାଉରକେଲା ମଧ୍ୟରେ ଉଭୟ ମାନଚିତ୍ରରୁ ପାଇଥିବା ଦୂରତାର ଅନୁପାତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କଲେ ଆମେ ଦେଖିବା ଯେ, ମାନଚିତ୍ର -I ଓ ମାନଚିତ୍ର II ରୁ ପାଇଥିବା ତିନିଯୋଡ଼ା ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତାର ଅନୁପାତ ପରସ୍ପର ସମାନ ହେବେ ।

ଅନ୍ୟ ଯେ କୌଣସି ଦୁଇଟି ସ୍ଥାନ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା ଉଭୟ ମାନଚିତ୍ରରୁ ମାପି ସେ ଦୁଇଟି ମଧ୍ୟରେ ଅନୁପାତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କଲେ ଆମେ ଦେଖିବା, ଆମେ ପାଇଥିବା ଭିନ୍ନ ଦୁଇଟି ସ୍ଥାନ ମଧ୍ୟରେ ମିଳିଥିବା ଦୂରତାର ଅନୁପାତ ମଧ୍ୟ ପୂର୍ବାଲୋଚିତ ଅନୁପାତ ସହ ସମାନ ହେବ । ଏହି କାରଣରୁ ହିଁ ଦୁଇଟି ଚିତ୍ର ଏକାଭଳି ଦେଖାଯାଇଥାଏ । ଆମେ କହୁ, ଚିତ୍ର ଦୁଇଟିର **ଆକୃତି (Shape)** ଅଭିନ୍ନ ।

ଅଭିନ୍ନ ଆକୃତି ଥିବା ବସ୍ତୁ ଦୁଇଟି ବା ଚିତ୍ର ଦୁଇଟିକୁ **ସଦୃଶ ବସ୍ତୁ ବା ସଦୃଶ ଚିତ୍ର (Similar Figures)** କୁହାଯାଏ । ସଦୃଶ ହେବାର ଗୁଣକୁ **ସାଦୃଶ୍ୟ (Similarity)** କୁହାଯାଏ ।

1.2 ଜ୍ୟାମିତିରେ ଅନୁପାତ ଓ ସମାନୁପାତ (Ratio and Proportion in Geometry) :

ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀରେ ତୁମେ ପଢ଼ିଛ : a, b, c, d ଚାରିଗୋଟି ଧନାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ସେଗୁଡ଼ିକ ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ ଆମେ ଲେଖୁ a : b = c : d

ଉକ୍ତ ସମାନୁପାତିକ ଧର୍ମକୁ ଏଠାରେ ପ୍ରୟୋଗ କରିବା ।

ତୁମେ ଜାଣିଛ : ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}$ ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ × ଉଚ୍ଚତା

ମନେକରାଯାଉ Δ_1 ରେ ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ b_1 ଏକକ ଏବଂ ଉଚ୍ଚତା h_1 ଏକକ ।

$\therefore \Delta_1$ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}$ $b_1 h_1$ ବର୍ଗ ଏକକ ।

ପୁନଶ୍ଚ Δ_2 ର ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ b_2 ଏକକ ଏବଂ ଉଚ୍ଚତା h_2 ଏକକ ହେଲେ

$\therefore \Delta_2$ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}$ $b_2 h_2$ ବର୍ଗ ଏକକ ହେବ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଧରି ନିଆଯାଉ ଯେ Δ_1 ଓ Δ_2 ର ଉଚ୍ଚତା $h_1 = h_2$ ।

$$\therefore \frac{\Delta_1 \text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\Delta_2 \text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}} = \frac{\frac{1}{2}b_1h_1}{\frac{1}{2}b_2h_2} = \frac{b_1h_1}{b_2h_1} = \frac{b_1}{b_2} \qquad .....(1)$$

ସେହିପରି ମନେକରାଯାଉ Δ_1 ଓ Δ_2 ର ଭୂମି ସମଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ, ଅର୍ଥାତ୍ $b_1 = b_2$ ।

$$\therefore \frac{\Delta_1 \text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\Delta_2 \text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}} = \frac{\frac{1}{2}b_1h_1}{\frac{1}{2}b_2h_2} = \frac{b_1h_1}{b_1h_2} = \frac{h_1}{h_2} \qquad ......(2)$$

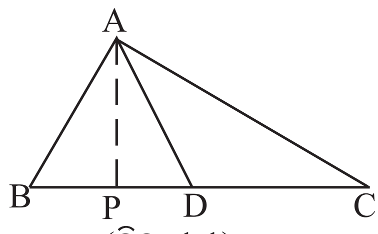
(1) ରୁ ସିଦ୍ଧାନ୍ତ ହେଲା -

ସମାନ ଉଚ୍ଚତା ବିଶିଷ୍ଟ ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଅନୁପାତ, ଉକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟର ଅନୁରୂପ ଭୂମିଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନୁପାତ ସହ ସମାନ ।

(2) ରୁ ସିଦ୍ଧାନ୍ତ ହେଲା -

ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜର ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜଦ୍ୱୟର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଅନୁପାତ, ଉକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜଦ୍ୱୟର ଅନୁରୂପ ଉଚ୍ଚତା ଦ୍ୱୟର ଅନୁପାତ, ସହ ସମାନ ।

ଏକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ପରିସ୍ଥିତି :



(ଚିତ୍ର 1.1)

ଚିତ୍ର 1.1 ରେ, D ବିନ୍ଦୁ $\overline{BC}$ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏବଂ B - D - C ।

ଫଳରେ ΔABD ର ଭୂମି $\overline{BD}$, ΔADC ର ଭୂମି $\overline{DC}$

ଏବଂ ΔABC ର ଭୂମି $\overline{BC}$ ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ।

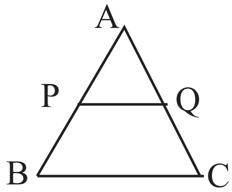
ପୁନଶ୍ଚ ΔABD, ΔADC ଓ ΔABC ପ୍ରତ୍ୟେକର ଶୀର୍ଷ A । ବର୍ତ୍ତମାନ $\overline{AP} \perp \overline{BC}$ ଅଙ୍କନ କରିବା ।

ଅତଏବ ପ୍ରତ୍ୟେକ ତ୍ରିଭୁଜର ଉଚ୍ଚତା AP ହେବ । ଅର୍ଥାତ୍ ତିନୋଟିଯାକ ତ୍ରିଭୁଜ ସମଉଚ୍ଚତା ବିଶିଷ୍ଟ ହେବେ ।

ଫଳରେ ଆମେ ଦେଖିଲେ, **ଦୁଇଟି (ବା ତହିଁରୁ ଅଧିକ) ତ୍ରିଭୁଜର ଭୂମିମାନ ଏକ ସରଳ ରେଖାରେ ରହିଲେ ଏବଂ ସେମାନଙ୍କର ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁ ଅଭିନ୍ନ ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜଗୁଡ଼ିକ ସମ ଉଚ୍ଚତା ବିଶିଷ୍ଟ ହେବେ ।**

ଜ୍ୟାମିତି କ୍ଷେତ୍ରରେ ମଧ୍ୟ କେତେକ ସ୍ଥଳରେ ବିଭିନ୍ନ ମାପ ସମାନୁପାତୀ ହୋଇଥିବାର ଆମେ ଦେଖୁ । ଏହିପରି କେତେକ ଜ୍ୟାମିତିକ ପରିସ୍ଥିତିର ଆଲୋଚନା ନିମ୍ନରେ କରାଯାଇଛି ।

ଚିତ୍ର 1.2 ରେ ΔABC ର $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ବାହୁ ଉପରେ ଯଥାକ୍ରମେ P ଓ Q ବିନ୍ଦୁ ଅବସ୍ଥିତ, ଯେପରିକି $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ ।



(ଚିତ୍ର 1.2)

P ବିନ୍ଦୁ $\overline{AB}$ କୁ AP : PB ଅନୁପାତରେ ଏବଂ Q ବିନ୍ଦୁ $\overline{AC}$ କୁ AQ : QC ଅନୁପାତରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭାଜନ କରନ୍ତି । ଏହି ପରିସ୍ଥିତିରେ ଆମେ ନିମ୍ନ ଉପପାଦ୍ୟ (1) ରୁ ଜାଣିବା ଯେ, $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$

ଅର୍ଥାତ୍ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଗୋଟିଏ ବାହୁ ସହ ସମାନ୍ତର ଏକ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଅନ୍ୟ ଦୁଇବାହୁକୁ ଛେଦ କଲେ, ଉକ୍ତ ବାହୁଦ୍ୱୟ ଉପରେ ଉତ୍ପନ୍ନ ଛେଦିତାଂଶମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନୁପାତୀ ହେବେ ।

ଭାଷାଗତ ସୁବିଧା ଦୃଷ୍ଟିରୁ ଆମେ ଏହି କ୍ଷେତ୍ରରେ କହିବା :- ''$\overline{PQ}$ ଦ୍ୱାରା $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ସମାନୁପାତରେ ବିଭାଜିତ ହୁଅନ୍ତି'' ଅଥବା, ''$\overline{PQ}$ ରେଖାଖଣ୍ଡ, $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ କୁ ସମାନୁପାତରେ ଛେଦ କରେ'' ($\overline{PQ}$ divides $\overline{AB}$ and $\overline{AC}$ proportionally) ।

ଆସ, ଉପରୋକ୍ତ ତଥ୍ୟର ଯୁକ୍ତି ଭିତ୍ତିକ ପ୍ରମାଣ (Logical Proof) କରିବା ।

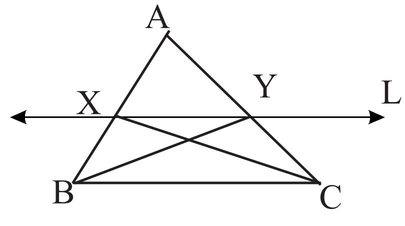
ଉପପାଦ୍ୟ - 1 (ଥେଲିସ୍ ଉପପାଦ୍ୟ)

ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଗୋଟିଏ ବାହୁ ସହ ସମାନ୍ତର ଏକ ସରଳରେଖା ଯଦି ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ୟ ଦୁଇ ବାହୁକୁ ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ, ତେବେ ଉକ୍ତ ସରଳରେଖା ଦ୍ୱାରା ଅନ୍ୟ ଦୁଇ ବାହୁ ସମାନୁପାତରେ ବିଭାଜିତ ହୁଅନ୍ତି ।

(If a line drawn parallal to a side of a triangle intersects the other two sides at two distinct points, then the line divides the other two sides proportionally.)

ଦତ୍ତ : ΔABC ର $\overline{BC}$ ବାହୁ ସହ ସମାନ୍ତର ଏକ ସରଳରେଖା L, ଅନ୍ୟ ଦୁଇ ବାହୁ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ କୁ ଯଥାକ୍ରମେ ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ ବିନ୍ଦୁ X ଓ Y ରେ ଛେଦ କରେ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : L ରେଖା $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ବାହୁଦ୍ୱୟକୁ ସମାନୁପାତରେ ଛେଦ କରେ; ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{YC}$



(ଚିତ୍ର 1.3)

ଅଙ୍କନ : $\overline{BY}$ ଓ $\overline{CX}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : ΔAXY ଓ ΔBXY ର ଭୂମି ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AX}$ ଓ $\overline{BX}$ ଏବଂ ଉଭୟ ଏକ ସରଳରେଖା $\overleftrightarrow{AB}$ ରେ ଅବସ୍ଥିତ । ପୁନଶ୍ଚ ଉଭୟ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ (Y) ଏକ ଓ ଅଭିନ୍ନ ବିନ୍ଦୁ । ଏଣୁ ଉକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟ ସମଉଚ୍ଚତା ବିଶିଷ୍ଟ ହେବେ ।

$\therefore \dfrac{\Delta\ AXY \text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\Delta\ BXY \text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}} = \dfrac{AX}{BX}$ ......(1)

ପୁନଶ୍ଚ ΔAYX ଓ ΔCYX ର ଭୂମି ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AY}$ ଓ $\overline{CY}$ ଏବଂ ଉଭୟ ଏକ ସରଳରେଖା $\overleftrightarrow{AC}$ ରେ ଅବସ୍ଥିତ । ଉଭୟ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ (X) ଏକ ଓ ଅଭିନ୍ନ । ଏଣୁ ଉକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟ ସମଉଚ୍ଚତା ବିଶିଷ୍ଟ ହେବେ ।

$\therefore \dfrac{\Delta\ AYX \text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\Delta\ CYX \text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}} = \dfrac{AY}{CY}$ ....(2)

ମାତ୍ର ΔBXY ଓ ΔCYX ଉଭୟ ଏକା ଭୂମି $\overline{XY}$ ଉପରେ ଏବଂ $\overline{XY}$ ସହ ଏକ ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା $\overleftrightarrow{BC}$ ଓ $\overline{XY}$ ମଧ୍ୟରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେତୁ, ΔBXY ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ΔCYX ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ..... (3)

(2) ଓ (3) $\Rightarrow \dfrac{\Delta\ AYX \text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\Delta\ BXY \text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}} = \dfrac{AY}{CY}$ ....(4)

(1) ଓ (4) $\Rightarrow \dfrac{AX}{BX} = \dfrac{AY}{CY}$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : ଚିତ୍ର - 1.3 ରେ (i) $\dfrac{BX}{AB} = \dfrac{CY}{AC}$ (ii) $\dfrac{AX}{AB} = \dfrac{AY}{AC}$

ପ୍ରମାଣ : ଉପପାଦ୍ୟ - 1 ଦ୍ୱାରା, $\dfrac{AX}{BX} = \dfrac{AY}{CY} \Rightarrow \dfrac{AX}{BX} + 1 = \dfrac{AY}{CY} + 1$

$\Rightarrow \dfrac{AX + BX}{BX} = \dfrac{AY + CY}{CY} \Rightarrow \dfrac{AB}{BX} = \dfrac{AC}{CY}$ ବା, $\dfrac{BX}{AB} = \dfrac{CY}{AC}$ [(i) ପ୍ରମାଣିତ]

ପୁନଶ୍ଚ, ଉପପାଦ୍ୟ - 1 ଦ୍ୱାରା, $\dfrac{AX}{BX} = \dfrac{AY}{CY} \Rightarrow \dfrac{BX}{AX} = \dfrac{CY}{AY}$ (ବ୍ୟସ୍ତ ଅନୁପାତ ନେଲେ)

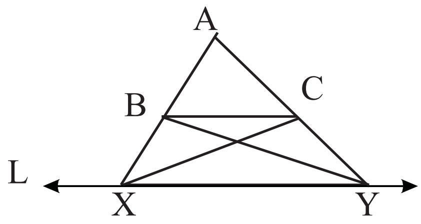
$\Rightarrow \dfrac{BX}{AX} + 1 = \dfrac{CY}{AY} + 1 \Rightarrow \dfrac{BX + AX}{AX} = \dfrac{CY + AY}{AY}$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AX} = \dfrac{AC}{AY}$ ବା, $\dfrac{AX}{AB} = \dfrac{AY}{AC}$ [(ii) ପ୍ରମାଣିତ]

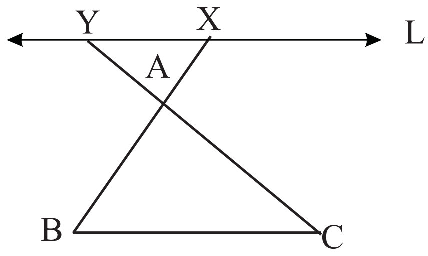
ମନ୍ତବ୍ୟ : (i) ଉପପାଦ୍ୟ - 1 କୁ ଜ୍ୟାମିତିରେ "ମୌଳିକ ସମାନୁପାତିତା ଉପପାଦ୍ୟ" (Basic Proportionality theorem) କୁହାଯାଏ । ଗ୍ରୀକ୍ ଦାର୍ଶନିକ ଓ ଗଣିତଜ୍ଞ ଥେଲିସ୍‌ଙ୍କ ନାମାନୁସାରେ ଏହାକୁ ଥେଲିସ୍‌ଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ କୁହାଯାଏ ।

(ii) ଉପପାଦ୍ୟ - 1 ର କଥନରେ ଆମେ L ରେଖା ନିମନ୍ତେ ଗୋଟିଏ ସର୍ତ୍ତ ଆରୋପ କରିଛୁ । ସର୍ତ୍ତଟି ହେଲା, 'L ରେଖା $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ବାହୁଦ୍ୱୟକୁ ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ ।

ଏହି ସର୍ତ୍ତବିନା, L ରେଖା ଲାଗି ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ ଅବସ୍ଥିତି ସମ୍ଭବ । ଚିତ୍ର - 1.4 ଓ ଚିତ୍ର - 1.5 ରେ ଏହି ଦୁଇଟି ପରିସ୍ଥିତିକୁ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।



ପରିସ୍ଥିତି (i)
(ଚିତ୍ର 1.4)



ପରିସ୍ଥିତି (ii)
(ଚିତ୍ର 1.5)

ଚିତ୍ର - 1.4 ରେ L ରେଖା ଓ $\overline{BC}$ ସମାନ୍ତର ଏବଂ $\overrightarrow{AB}$ ଓ $\overrightarrow{AC}$, L ରେଖାକୁ ଯଥାକ୍ରମେ X ଓ Y ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । [ଏଠାରେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ କୁ L ରେଖା ବହିର୍ବିଭାଜନ କରେ ବୋଲି କୁହଯାଏ ଏବଂ $\overline{AX}$ ଓ $\overline{BX}$ କୁ $\overline{AB}$ ର ବହିର୍ବିଭାଜିତ ଅଂଶ ରୂପେ ନିଆଯାଏ ।]

ଏହି କ୍ଷେତ୍ରରେ ପ୍ରମାଣଟି ନିମ୍ନମତେ କରଯାଇଥାଏ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\dfrac{AX}{BX} = \dfrac{AY}{CY}$

ଅଙ୍କନ : $\overline{BY}$ ଓ $\overline{CX}$ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ ।

ପ୍ରମାଣ : $\dfrac{\Delta\ AXC\text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\Delta\ BXC\text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}} = \dfrac{AX}{BX}$ ....(1)

[ତ୍ରିଭୁଜଦ୍ୱୟର ଭୂମି ଏକ ସରଳରେଖା $\overleftrightarrow{AB}$ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏବଂ ଉଭୟ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷ (C) ଅଭିନ୍ନ ହେତୁ]

ପୁନଶ୍ଚ, $\dfrac{\Delta\ AYB\text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\Delta\ CYB\text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}} = \dfrac{AY}{CY}$ ....(2) [ପୂର୍ବବର୍ତ୍ତୀ କାରଣ ସହ ଅନୁରୂପ କାରଣ ହେତୁ]

ମାତ୍ର ΔBXC ଓ ΔCYB ଉଭୟ ଏକା ଭୂମି $\overline{BC}$ ଉପରେ ଓ ଦୁଇ ସମାନ୍ତର ରେଖା $\overline{BC}$ ଓ L ମଧ୍ୟରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେତୁ ΔBXC କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = Δ CYB ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ - - - - - (3)

$\Rightarrow \Delta$ BXC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ + ΔABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ΔCYB ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ + ΔABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

[ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ΔABC ର କ୍ଷେ.ଫ. ଯୋଗକଲେ]

$\Rightarrow \Delta$AXC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ΔAYB ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ - - - - - (4)

(3) ଓ (4) ରୁ ଆମେ ପାଇବା $\dfrac{\Delta\ AXC\text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\Delta\ BXC\text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}} = \dfrac{\Delta\ AYB\text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\Delta\ CYB\text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}$

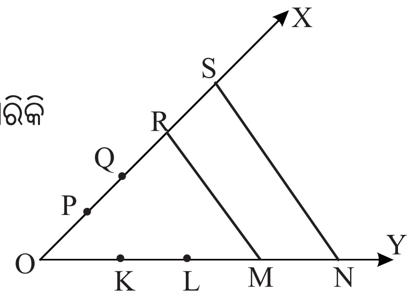
$\Rightarrow \dfrac{AX}{BX} = \dfrac{AY}{CY}$ [(1) ଓ (2) ଅନୁଯାୟୀ] [ପ୍ରମାଣିତ]

ପରିସ୍ଥିତି (ii), ଅର୍ଥାତ୍ ଚିତ୍ର 1.5 ରେ ପ୍ରଦର୍ଶିତ ପରିସ୍ଥିତିରେ ନିଜେ ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ଚେଷ୍ଟା କର ।

ଉପାପାଦ୍ୟ - 1 ର ବିପରୀତ ଉପପାଦ୍ୟ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଆଲୋଚନା :

ଉପପାଦ୍ୟ - 1 ର ବିପରୀତ କଥନ ନିମ୍ନମତେ ହେବ ।

ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇ ବାହୁକୁ ସମାନୁପାତରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭାଜନ କରୁଥିବା ରେଖା, ଉକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜର ତୃତୀୟ ବାହୁ ସହ ସମାନ୍ତର ।



(ଚିତ୍ର 1.6)

ଚିତ୍ର - 1.6 ରେ $\angle XOY$ ଏକ ସୂକ୍ଷ୍ମ କୋଣ ।

$\overrightarrow{OX}$ ଉପରେ P, Q, R ଓ S ବିନ୍ଦୁ ଚାରୋଟି ଏପରି ଅବସ୍ଥିତ ଯେପରିକି

OP = PQ = QR = RS

ସେହିପରି $\overrightarrow{OY}$ ଉପରେ K, L, M ଓ N ବିନ୍ଦୁ ଚାରୋଟି ଏପରି ଅବସ୍ଥିତ, ଯେପରିକି OK = KL = LM = MN.

$\overline{RM}$ ଓ $\overline{SN}$ ରେଖାଖଣ୍ଡମାନ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇଛି ।

$\therefore \frac{OR}{RS} = \frac{3}{1}$ . ...(1), ଏବଂ $\frac{OM}{MN} = \frac{3}{1}$ ....(2)

(1) ଓ (2) ରୁ ପାଇବା $\frac{OR}{RS} = \frac{OM}{MN}$

ଅର୍ଥାତ୍, ΔSON ରେ $\overleftrightarrow{RM}$ ରେଖା, $\overline{OS}$ ଓ $\overline{ON}$ ବାହୁଦ୍ୱୟକୁ ସମାନୁପାତରେ ଛେଦକରେ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ଏକ ପ୍ରୋଟ୍ରାକ୍ଟର ସାହାଯ୍ୟରେ ମାପକରି ଦେଖି ପାରିବା ଯେ $m\angle ORM = m\angle OSN$ ଫଳରେ $\overline{RM} \parallel \overline{SN}$ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଏହି କଥନର ଯୁକ୍ତିମୂଳକ ପ୍ରମାଣ କରିବା ।

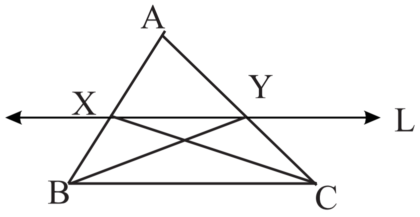
ଉପାପାଦ୍ୟ - 2

(ଉପପାଦ୍ୟ - 1 ର ବିପରୀତ)

ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇ ବାହୁକୁ ସମାନୁପାତରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭାଜନ କରୁଥିବା ରେଖା, ଉକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜର ତୃତୀୟ ବାହୁ ସହ ସମାନ୍ତର ।

(If a line divides two sides of a triangle internally in the same ratio, then it is parallel to the third side of the triangle.)

ଦତ୍ତ : ΔABC ର $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ବାହୁକୁ L ରେଖା ଯଥାକ୍ରମେ X ଓ Y ବିନ୍ଦୁରେ ସମାନୁପାତରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭାଜନ କରୁଛି ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{AX}{BX} = \frac{AY}{CY}$ ।



(ଚିତ୍ର 1.7)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : L ରେଖା $\overline{BC}$ ସହ ସମାନ୍ତର ।

ଅଙ୍କନ : $\overline{BY}$ ଓ $\overline{CX}$ ଅଙ୍କନ କରଯାଉ ।

ପ୍ରମାଣ : ΔAXY ଏବଂ ΔBXY ର ଭୂମି ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AX}$ ଓ $\overline{BX}$ ଏବଂ ଭୂମି ଦ୍ୱୟ ଏକ ସରଳରେଖା $\overleftrightarrow{AB}$ ରେ ଅବସ୍ଥିତ । ପୁନଶ୍ଚ ଉଭୟ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁ (Y) ଏକ ଓ ଅଭିନ୍ନ ବିନ୍ଦୁ । ଏଣୁ ଉକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟ ସମଉଚ୍ଚତା ବିଶିଷ୍ଟ ହେବେ।

$$\therefore \frac{\Delta\, AXY \text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\Delta\, BXY \text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}} = \frac{AX}{BX} \qquad \text{........(1)}$$

ସେହିପରି ΔAYX ଏବଂ ΔCYX ର ଭୂମି $\overline{AY}$ ଓ $\overline{CY}$ ଏବଂ ଭୂମିଦ୍ୱୟ ଏକ ସରଳରେଖା $\overleftrightarrow{AC}$ ରେ ଅବସ୍ଥିତ । ଏକ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ X ବିଶିଷ୍ଟ ହେତୁ ତ୍ରିଭୁଜଦ୍ୱୟ ସମଉଚ୍ଚତା ବିଶିଷ୍ଟ ।

$$\therefore \frac{\Delta\, AYX \text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\Delta\, CYX \text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}} = \frac{AY}{CY} \qquad \text{........(2)}$$

ମାତ୍ର $\frac{AX}{BX} = \frac{AY}{CY}$ (ଦତ୍ତ) ....(3)

ଉକ୍ତି (1), (2) ଓ (3) $\Rightarrow \frac{\Delta\, AXY \text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\Delta\, BXY \text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}} = \frac{\Delta\, AYX \text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\Delta\, CYX \text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}$

$\Rightarrow \Delta BXY$ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ΔCYX ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ।

ଏଠାରେ ତ୍ରିଭୁଜଦ୍ୱୟ ଏକା ଭୂମି $\overline{XY}$ ଉପରିସ୍ଥ (ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଯେ କୌଣସି ବାହୁକୁ ଏହାର ଭୂମି ବୋଲି ଧରାଯାଇପାରେ) ।

$\therefore$ ΔBXY ଓ ΔCYX ଉଭୟର ଉଚ୍ଚତା ସମାନ

$\Rightarrow \overleftrightarrow{XY} \parallel \overline{BC} \Rightarrow$ L ରେଖା, $\overline{BC}$ ସହ ସମାନ୍ତର । (ପ୍ରମାଣିତ)

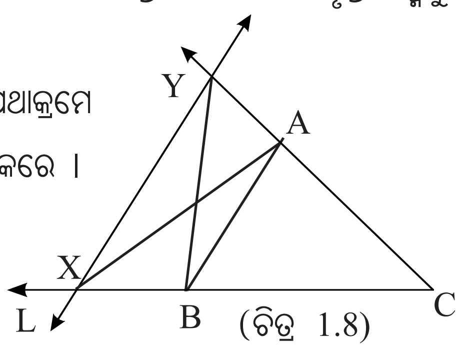
(ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ତ୍ରିଭୁଜର ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ହେଲେ, ସେମାନଙ୍କର ଉଚ୍ଚତା ମଧ୍ୟ ସମାନ ହୁଏ)

ଅର୍ଥାତ୍, B ଓ C ଠାରୁ $\overleftrightarrow{XY}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ-ଦୂରତା ସମାନ ।

ମନ୍ତବ୍ୟ (1) : କୌଣସି ରେଖା ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଯେ କୌଣସି ଦୁଇଟି ବାହୁକୁ ସମାନୁପାତରେ ବହିର୍ବିଭାଜନ କଲେ, ଉକ୍ତ ରେଖା ତ୍ରିଭୁଜର ତୃତୀୟ ବାହୁ ସହ ସମାନ୍ତର ହେବ ।

ଟୀକା : ଏକ ରେଖା କୌଣସି ଏକ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ବହିର୍ବିଭାଜନ କରିବା ଅର୍ଥ ଉକ୍ତ ରେଖାଖଣ୍ଡ- ସମ୍ପୃକ୍ତ ରଶ୍ମିକୁ (ରେଖାଖଣ୍ଡ ବ୍ୟତୀତ) ଛେଦ କରିବା ।

ଚିତ୍ର - 1.8 ରେ L ରେଖା, ΔABC ର $\overline{CA}$ ଓ $\overline{CB}$ ବାହୁକୁ ଯଥାକ୍ରମେ Y ଓ X ବିନ୍ଦୁରେ ବହିର୍ବିଭାଜନ କରେ, ଅର୍ଥାତ୍ $\overrightarrow{CA}$ ଓ $\overrightarrow{CB}$ କୁ ଛେଦ କରେ ।



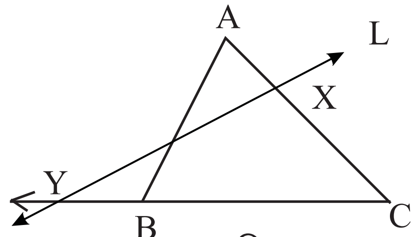
(ଚିତ୍ର 1.8)

ଦତ୍ତ ଅଛି : $\frac{CY}{AY} = \frac{CX}{BX}$ ।

ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ହେବ : L ସମାନ୍ତର $\overline{AB}$ ।

$\overline{AX}$ ଏବଂ $\overline{BY}$ ଅଙ୍କନ କରି, ଉପପାଦ୍ୟ - 2 ର ପ୍ରମାଣ ଅବଲମ୍ବନରେ ପ୍ରମାଣ କରିବା ଯେ L ରେଖା ଓ $\overline{AB}$ ପରସ୍ପର ସମାନ୍ତର ।

(2) : ଯଦି L ରେଖା $\overline{AC}$ ବାହୁକୁ ଅନ୍ତର୍ବିଭାଜନ ଏବଂ $\overline{CB}$ ବାହୁକୁ ବହିର୍ବିଭାଜନ କରେ ଏବଂ ଅନୁପାତ ଦ୍ୱୟ ସମାନ ହୁଏ, ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{AX}{CX}=\frac{BY}{CY}$ ହୁଏ, ତେବେ L ରେଖା, ΔABC ର ତୃତୀୟ ବାହୁ $\overline{AB}$ ସହ ସମାନ୍ତର ହେବ କି ?

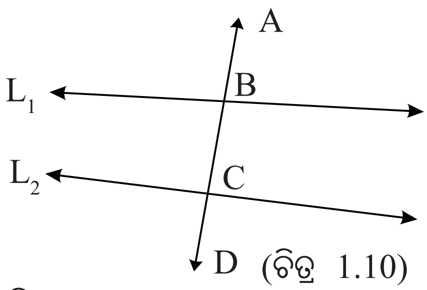


(ଚିତ୍ର 1.9)

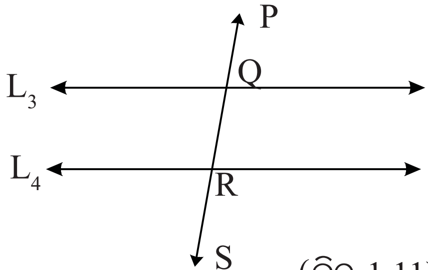
ଚିତ୍ର 1.9 ରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ $\overleftrightarrow{AB}$ ର C ପାର୍ଶ୍ୱରେ X ବିନ୍ଦୁ ଅବସ୍ଥିତ ଏବଂ ଏହାର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ Y ବିନ୍ଦୁ ଅବସ୍ଥିତ । ଫଳରେ $\overleftrightarrow{XY}$, $\overleftrightarrow{AB}$ କୁ ଛେଦ କରିବ ।

$\therefore$ $\overleftrightarrow{XY}$, $\overleftrightarrow{AB}$ ସହ ସମାନ୍ତର ହେବ ନାହିଁ ।

1.3 ଛେଦକ ରେଖା ଓ ଛେଦିତାଂଶ (Transversal and Intercept) :



(ଚିତ୍ର 1.10)



(ଚିତ୍ର 1.11)

ଚିତ୍ର 1.10 ରେ, L_1 ଓ L_2 ରେଖାଦ୍ୱୟର $\overleftrightarrow{AD}$ ଏକ **ଛେଦକ (transversal)**. L_1 ଓ L_2 ରେଖାକୁ ଛେଦକ $\overleftrightarrow{AD}$ ଯଥାକ୍ରମେ B ଓ C ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । $\overline{BC}$ କୁ ଛେଦକ $\overleftrightarrow{AD}$ ଉପରିସ୍ଥ **ଛେଦିତାଂଶ** (intercept) ବୋଲି କୁହାଯାଏ ।

ଚିତ୍ର -1.11 ରେ, $L_3 \parallel L_4$ ଏବଂ $\overleftrightarrow{PS}$ ଏକ ଛେଦକ । ଏଠାରେ $\overline{QR}$ ହେଉଛି ଛେଦକ $\overleftrightarrow{PS}$ ଉପରିସ୍ଥ ଛେଦିତାଂଶ (intercept) ।

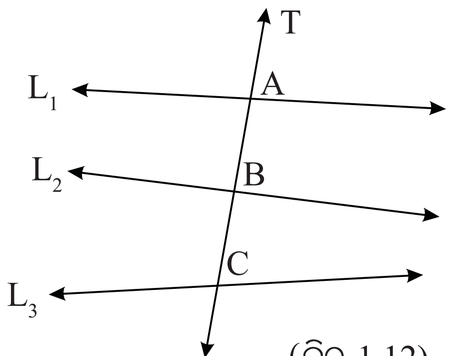
1.3.1 ତିନୋଟି ରେଖାର ଛେଦକ ଉପରିସ୍ଥ ଛେଦିତାଂଶ

ଚିତ୍ର -1.12 ରେ, ଛେଦକ ରେଖା T ଉପରେ

(i) L_1 ଓ L_2 ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଛେଦିତାଂଶ $\overline{AB}$;

(ii) L_1 ଓ L_3 ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଛେଦିତାଂଶ $\overline{AC}$;

ଏବଂ (iii) L_2 ଓ L_3 ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଛେଦିତାଂଶ $\overline{BC}$ ।



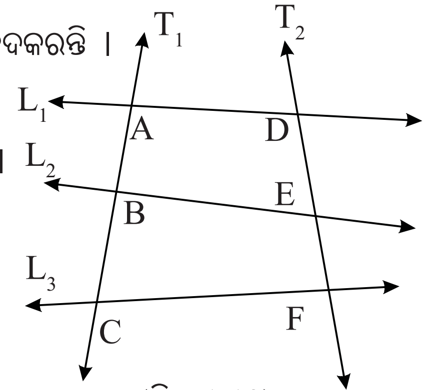
(ଚିତ୍ର 1.12)

ସଂଜ୍ଞା : ଏକ ଛେଦକ ଉପରିସ୍ଥ ଦୁଇଟି ଛେଦବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱାରା ନିର୍ଦ୍ଧାରିତ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ଛେଦକର ଗୋଟିଏ ଛେଦାଂଶ ବା ଛେଦିତାଂଶ କୁହାଯାଏ ।

1.3.2 ତିନୋଟି ରେଖାର ଦୁଇଟି ଛେଦକ ଉପରିସ୍ଥ ଅନୁରୂପ ଛେଦିତାଂଶ :

ଚିତ୍ର-1.13ରେ, L_1, L_2, L_3 ରେଖା ତିନୋଟିକୁ T_1 ଓ T_2 ରେଖାଦ୍ୱୟ ଛେଦକରନ୍ତି । L_1, L_2,L_3କୁ ଛେଦକ T_1 ଯଥାକ୍ରମେ A, B ଓ C ବିନ୍ଦୁରେ ଏବଂ ସେହି ରେଖା ତିନୋଟିକୁ ଛେଦକ T_2 ଯଥାକ୍ରମେ D,E ଓ F ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରେ । ଚିତ୍ର - 1.13 ରେ

T_1 ଓ T_2 ଛେଦକ ଦ୍ୱୟ ଉପରେ ଉତ୍ପନ୍ନ ହେଉଥିବା ଛେଦିତାଂଶ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{DE}$ ଦୁଇଟି ଅନୁରୂପ ଛେଦିତାଂଶ । ସେହିପରି $\overline{BC}$ ଓ $\overline{EF}$ ଏବଂ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{DF}$ ଦୁଇଯୋଡ଼ା ଅନୁରୂପ ଛେଦିତାଂଶ ।

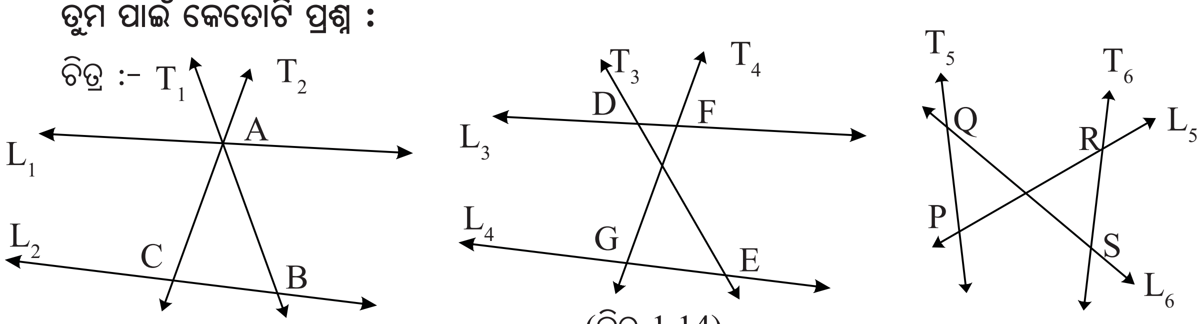


(ଚିତ୍ର 1.13)

ସଂଜ୍ଞା : ଦୁଇଟି ସରଳରେଖାକୁ ଦୁଇଟି ଛେଦକ ଛେଦକଲେ, ଛେଦକ ରେଖାଦ୍ୱୟ ଉପରେ ଉତ୍ପନ୍ନ ହୋଇଥିବା ଛେଦିତାଂଶ ଦ୍ୱୟକୁ ଅନୁରୂପ ଛେଦିତାଂଶ (Corresponding intercepts) କୁହାଯାଏ ।

ତୁମ ପାଇଁ କେତୋଟି ପ୍ରଶ୍ନ :

ଚିତ୍ର :-



(ଚିତ୍ର 1.14)

(a) (b) (c)

ପ୍ରଶ୍ନ -1 : ଚିତ୍ର 1.14(a) ରେ L_1 ଓ L_2 ରେଖା ଦ୍ୱୟକୁ ଛେଦକ T_1 ଯଥାକ୍ରମେ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଏବଂ ଛେଦକ T_2 ଯଥାକ୍ରମେ A ଓ C ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରେ ।

ଏକ୍ଷେତ୍ରରେ ଅନୁରୂପ ଛେଦିତାଂଶ ଦୁଇଟିର ନାମ କୁହ ।

ପ୍ରଶ୍ନ - 2 : ଚିତ୍ର -1.14(b) ରେ L_3 ଓ L_4 ରେଖା ଦ୍ୱୟକୁ ଛେଦକ T_3 ଯଥାକ୍ରମେ D ଓ E ବିନ୍ଦୁରେ ଏବଂ ଛେଦକ T_4 ଯଥାକ୍ରମେ F ଓ G ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରେ । ଏକ୍ଷେତ୍ରରେ ଅନୁରୂପ ଛେଦିତାଂଶ ଦୁଇଟିର ନାମ କୁହ ।

ପ୍ରଶ୍ନ - 3 : ଚିତ୍ର - 1.14(c) ରେ L_5 ଓ L_6 ରେଖାଦ୍ୱୟକୁ ଛେଦକ T_5 ଯଥାକ୍ରମେ P ଓ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଏବଂ ଛେଦକ T_6 ଯଥାକ୍ରମେ R ଓ S ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରେ । ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଅନୁରୂପ ଛେଦିତାଂଶ ଦୁଇଟିର ନାମ କୁହ ।

1.3.3 ତିନୋଟି ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାର ଦୁଇଟି ଛେଦକ ଉପରିସ୍ଥ ଅନୁରୂପ ଛେଦିତାଂଶ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ପର୍କ :

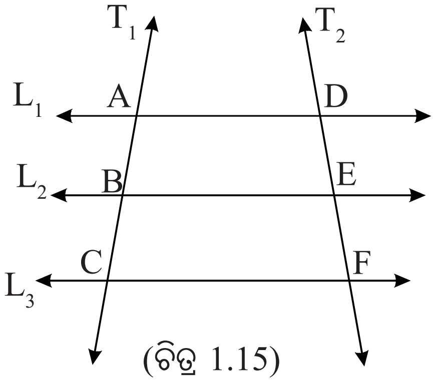
ଆସ ତିନୋଟି ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା ଓ ସେମାନଙ୍କୁ ଛେଦକରୁଥିବା ଦୁଇଟି ଛେଦକ ଉପରିସ୍ଥ ଅନୁରୂପ ଛେଦିତାଂଶ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସମ୍ପର୍କକୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କରିବା ।

ଚିତ୍ର - 1.15 ରେ $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ ଏବଂ T_1 ଓ T_2 ଉକ୍ତ ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାମାନଙ୍କୁ ଛେଦ କରୁଥିବା ଦୁଇଟି ଛେଦକ । L_1, L_2 ଓ L_3 କୁ ଛେଦକ T_1 ଯଥାକ୍ରମେ A, B ଓ C ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରେ ଏବଂ ଛେଦକ T_2 ଯଥାକ୍ରମେ D, E ଓ F ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ ।

L_1 ଓ L_2 କୁ T_1 ଓ T_2 ଛେଦ କରିବା ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଅନୁରୂପ ଛେଦିତାଂଶ ହେଲେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{DE}$

L_2 ଓ L_3 କୁ T_1 ଓ T_2 ଛେଦକରିବା ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଅନୁରୂପ ଛେଦିତାଂଶ ହେଲେ $\overline{BC}$ ଓ $\overline{EF}$ ।

L_1 ଓ L_3 କୁ T_1 ଓ T_2 ଛେଦକରିବା ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଅନୁରୂପ ଛେଦିତାଂଶ ହେଲେ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{DF}$ ।



(ଚିତ୍ର 1.15)

ଏହିଭଳି ଏକ ଚିତ୍ର କରି (ସ୍କେଲ୍ ଓ କମ୍ପାସ ସାହାଯ୍ୟରେ)

ଛେଦିତାଂଶ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{AC}$ ଓ $\overline{DF}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମାପିଲେ, ଆମେ ଦେଖିବା ଯେ

$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$ ହେବ ।

ସିଦ୍ଧାନ୍ତ : ତିନୋଟି ପରସ୍ପର ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାକୁ ଦୁଇଟି ଛେଦକ ରେଖା ଛେଦ କରିବା ଦ୍ୱାରା ଛେଦକ ରେଖା ଦ୍ୱୟ ଉପରେ ଉତ୍ପନ୍ନ ହୋଇଥିବା ଅନୁରୂପ ଛେଦିତାଂଶଗୁଡ଼ିକର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନୁପାତ ସମାନ ।

ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$ ।

ପୁନଶ୍ଚ (i) $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$,

(ii) $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$ ଏବଂ

(iii) $\frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF}$

ସମାନୁପାତର ଏକାନ୍ତର ପ୍ରକ୍ରିୟା ଅନୁଯାୟୀ, ଉକ୍ତ ସିଦ୍ଧାନ୍ତର ଯୁକ୍ତିଭିତ୍ତିକ ପ୍ରମାଣ କରିବା ।

ପ୍ରମେୟ - 1.1 :

ତିନୋଟି ପରସ୍ପର ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାକୁ ଦୁଇଟି ସରଳରେଖା ଛେଦକରିବା ଦ୍ୱାରା, ଛେଦକ ରେଖାଦ୍ୱୟ ଉପରେ ଉତ୍ପନ୍ନ ହୋଇଥିବା ଅନୁରୂପ ଛେଦିତାଂଶ ମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନୁପାତୀ ହୁଅନ୍ତି ।

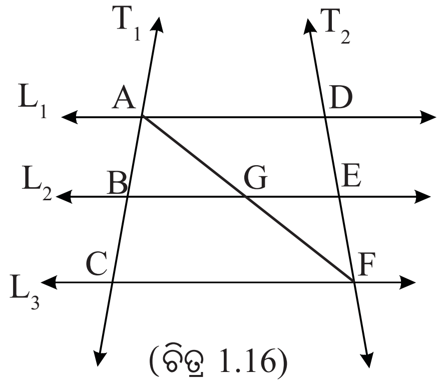
(If two transversals intersect three mutually parallel straight lines, then the lengths of the corresponding intercepts formed on the transversals are proportional.)

ଦତ୍ତ : ସରଳରେଖା $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$; ଛେଦକ ରେଖା T_1 ଓ T_2,

L_1, L_2 ଓ L_3 ତ୍ରୟକୁ ଯଥାକ୍ରମେ A, B, C ଓ D, E, F ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

ଅଙ୍କନ : $\overline{AF}$ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ ।



(ଚିତ୍ର 1.16)

ପ୍ରମାଣ : $\overline{AF}$, L_2 କୁ ଛେଦ କରିବ

(A ଓ F ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ L_2 ର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିବାରୁ)

$\overline{AF}$ ଓ L_2 ର ଛେଦ ବିନ୍ଦୁର ନାମ G ଦିଆଯାଉ ।

ΔACF ରେ $L_2 \parallel \overline{CF}$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AG}{GF}$ (ଉପପାଦ୍ୟ - 1 ଅନୁଯାୟୀ) .... (1)

ପୁନଶ୍ଚ, ΔAFD ରେ, $L_2 \parallel \overline{AD}$ $\Rightarrow \dfrac{AG}{GF} = \dfrac{DE}{EF}$ (ଉପପାଦ୍ୟ - 1 ଅନୁଯାୟୀ) .... (2)

(1) ଓ (2) $\Rightarrow \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF}$ ....(3) $\Rightarrow \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF}$ (ଏକାନ୍ତର ପ୍ରକ୍ରିୟା)........ (4)

ପୁନଶ୍ଚ (3) $\Rightarrow \dfrac{AB+BC}{BC} = \dfrac{DE+EF}{EF}$ (ଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟା)

$\Rightarrow \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{DF}{EF} \Rightarrow \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$ ....(ଏକାନ୍ତର ପ୍ରକ୍ରିୟା) .... (5)

(4) ଓ (5) $\Rightarrow \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF}$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ -(i) : $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{DE}{DF}$ (ii) $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{EF}{DF}$

ପ୍ରମାଣ : $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$ (ପ୍ରମେୟ 1.1 ରେ ପ୍ରମାଣିତ) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{DE}{DF}$ (i) ପ୍ରମାଣିତ

ପୁନଶ୍ଚ, $\dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF}$ (ପ୍ରମେୟ 1.1 ରେ ପ୍ରମାଣିତ) $\Rightarrow \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{EF}{DF}$ (ii) ପ୍ରମାଣିତ

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - (iii) : ତିନୋଟି (ବା ଅଧିକ ସଂଖ୍ୟକ) ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାକୁ ଛେଦ କରୁଥିବା ଗୋଟିଏ ଛେଦକ ଉପରିସ୍ଥ ଛେଦିତାଂଶମାନେ ସମଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ହେଲେ, ଉକ୍ତ ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାମାନଙ୍କର ଅନ୍ୟ ଯେ କୌଣସି ଛେଦକ ଉପରିସ୍ଥ ଛେଦିତାଂଶମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମଧ୍ୟ ସମାନ ।

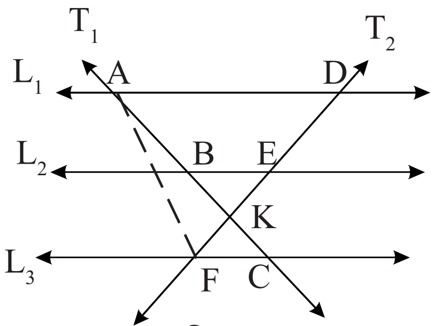
ପ୍ରମାଣ : $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ ଏବଂ T_1 ଓ T_2 ଦୁଇଟି ଛେଦକ । (ଚିତ୍ର 1.16 ଦେଖ)

$\therefore$ ଅନୁରୂପ ଛେଦିତାଂଶ ମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନୁପାତୀ $\Rightarrow \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF}$ .... (1)

ମାତ୍ର T_1 ଉପରିସ୍ଥ ଛେଦିତାଂଶ ଦ୍ୱୟ ସମଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ । ଅର୍ଥାତ୍, AB = BC (ଦତ୍ତ) ..... (2)

$\therefore (1) \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{AB}{EF}$ ..... [(2) ଅନୁଯାୟୀ]

$\Rightarrow$ DE = EF (ପ୍ରମାଣିତ)

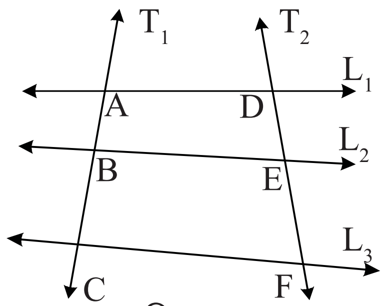


(ଚିତ୍ର 1.17)

ମନ୍ତବ୍ୟ - (1) : ପ୍ରମେୟଟିକୁ ପ୍ରମାଣ କଲାବେଳେ ନିଆଯାଇ ଥିବା ଚିତ୍ରରେ କୌଣସି ଦୁଇଟି ଅନୁରୂପ ଛେଦିତାଂଶ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରି ନ ଥିଲାବେଳେ, ଚିତ୍ର 1.17 ରେ ଦୁଇଟି ଅନୁରୂପ ଛେଦିତାଂଶ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରନ୍ତି । ଏ ପରିସ୍ଥିତିରେ ମଧ୍ୟ $\overline{AF}$ ଅଙ୍କନ କରି ଏବଂ Δ AFC ଓ Δ AFD ରେ ଉପପାଦ୍ୟ-1 ର ପ୍ରୟୋଗ କରି ଆମେ ପୂର୍ବ ପରି ପ୍ରମାଣ କରିପାରିବା ଯେ, $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ ।

(2) ତିନୋଟିରୁ ଅଧିକ ସଂଖ୍ୟକ ପରସ୍ପର ସମାନ୍ତରରେଖା କ୍ଷେତ୍ରରେ ମଧ୍ୟ ଉପରୋକ୍ତ ପ୍ରମେୟଟି ପ୍ରମାଣ ଯୋଗ୍ୟ ।

ପ୍ରମେୟ -1.1 ର ବିପରୀତ ଉକ୍ତି ସତ୍ୟ ନୁହେଁ । ଅର୍ଥାତ୍, ତିନୋଟି ରେଖାକୁ ଦୁଇଟି ଛେଦକ ରେଖା ଛେଦ କରିବା ଦ୍ୱାରା ଛେଦକ ରେଖାଦ୍ୱୟ ଉପରେ ଉତ୍ପନ୍ନ ଅନୁରୂପ ଛେଦିତାଂଶମାନ ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, ଛେଦିତ ରେଖା ତିନୋଟି ସମାନ୍ତର ହୋଇପାରନ୍ତି ବା ନ ହୋଇପାରନ୍ତି ମଧ୍ୟ ।



(ଚିତ୍ର 1.18)

ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣରୁ ତାହା ସ୍ପଷ୍ଟ ।

ଚିତ୍ର - 1.18 ରେ T_1 ଓ T_2 ଛେଦକ ଦ୍ୱୟ ଦୁଇ ଅସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା L_1 ଓ L_2 କୁ ଯଥାକ୍ରମେ A, B ଏବଂ D, E ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି ।

ମନେକରାଯାଉ AB = x ଏକକ ଓ DE = y ଏକକ,

ବର୍ତ୍ତମାନ T_1 ଓ T_2 ଛେଦକ ଉପରେ ଯଥାକ୍ରମେ C ଓ F ବିନ୍ଦୁ ଦୁଇଟି ନିଆଯାଉ ଯେପରି BC = 2x ଏକକ ଏବଂ EF = 2y ଏକକ ହେବ । C, F କୁ ଯୋଗକରି L_3 ସରଳରେଖା ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ । ବର୍ତ୍ତମାନ

$$\frac{AB}{DE} = \frac{x}{y} \text{ ....(1)}, \quad \frac{BC}{EF} = \frac{2x}{2y} = \frac{x}{y} \text{ ....(2)} \quad \frac{AC}{DF} = \frac{AB + BC}{DE + EF} = \frac{3x}{3y} = \frac{x}{y} \text{ ....(3)}$$

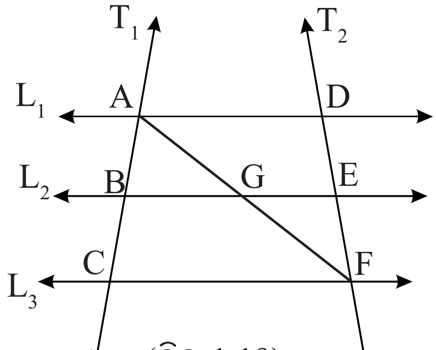
$$(1), (2) \text{ ଓ } (3) \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

ଏଠାରେ ଛେଦକ ରେଖା ଦ୍ୱୟ ଉପରେ ଉତ୍ପନ୍ନ ଅନୁରୂପ ଛେଦିତାଂଶ ଗୁଡ଼ିକ ସମାନୁପାତୀ ଅଟନ୍ତି । କିନ୍ତୁ L_1, L_2 ଓ L_3 ପରସ୍ପର ସମାନ୍ତର ନୁହନ୍ତି ।

ତେଣୁ ଆମେ ଦେଖିଲେ, **'ଛେଦିତାଂଶଗୁଡ଼ିକ ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ ମଧ୍ୟ ଛେଦିତାଂଶ ଉତ୍ପନ୍ନ କରୁଥିବା ରେଖାଗୁଡ଼ିକ ସର୍ବଦା ସମାନ୍ତର ନ ହୋଇ ପାରନ୍ତି ।'**

ଉଦାହରଣ - 1 : ଚିତ୍ର - 1.19 ରେ $L_1 \parallel L_2$ ଏବଂ $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF}$ ।

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, L_1, L_2 ଓ L_3 ପରସ୍ପର ସମାନ୍ତର ।



(ଚିତ୍ର 1.19)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$

ଅଙ୍କନ : $\overline{AF}$ ଅଙ୍କନ କରଯାଉ ଏବଂ $\overline{AF}$ ଓ L_2 ପରସ୍ପରକୁ G ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତୁ ।

ପ୍ରମାଣ : ΔAFD ରେ, $\overline{EG} \parallel \overline{DA}$ [$\because L_1 \parallel L_2$]

$\therefore \dfrac{AG}{GF} = \dfrac{DE}{EF}$ କିନ୍ତୁ ଦତ୍ତ ଅଛି $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF}$

$\therefore \dfrac{AG}{GF} = \dfrac{AB}{BC}$; ଅର୍ଥାତ୍ ΔACF ର $\overline{AC}$ ଓ $\overline{AF}$ ବାହୁଦ୍ୱୟକୁ L_2 ସମାନୁପାତରେ ଛେଦକରେ ।

$\Rightarrow L_2 \parallel L_3$ ମାତ୍ର $L_1 \parallel L_2$ (ଦତ୍ତ)

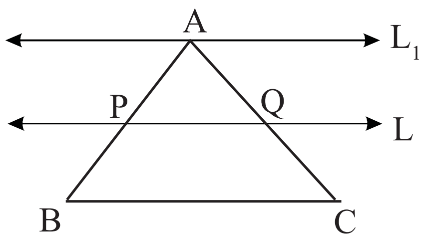
$\Rightarrow L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ - 2 : ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର କୌଣସି ଏକ ବାହୁର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ୟ ଏକ ବାହୁ ସହ ସମାନ୍ତର ଭାବେ ଅଙ୍କିତ ସରଳରେଖା, ଉକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜର ତୃତୀୟ ବାହୁକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରିବ ।

ଦତ୍ତ : ΔABC ରେ $\overline{AB}$ ବାହୁର ମଧ୍ୟ ବିନ୍ଦୁ P । P ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ L ରେଖା ଅଙ୍କିତ ଏବଂ L, $\overline{BC}$ ସହ ସମାନ୍ତର । L ଓ $\overline{AC}$ ର ଛେଦ ବିନ୍ଦୁ Q ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : L ରେଖା $\overline{AC}$ କୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ । ଅର୍ଥାତ୍ $AQ = QC$ ।

ଅଙ୍କନ : A ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଓ L ରେଖା ସହ ସମାନ୍ତର କରି L_1 ରେଖା ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ ।



(ଚିତ୍ର 1.20)

ପ୍ରମାଣ : $L \parallel \overline{BC}$ (ଦତ୍ତ) ....(1)

ଏବଂ $L_1 \parallel L$ (ଅଙ୍କନ ଅନୁଯାୟୀ) ....(2)

(1) ଓ (2) $\Rightarrow L_1 \parallel \overline{BC}$, ଅର୍ଥାତ୍, $L_1 \parallel L \parallel \overline{BC}$

$\overleftrightarrow{AB}$ ଓ $\overleftrightarrow{AC}$ ଉକ୍ତ ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା ତ୍ରୟର ଛେଦକ

$\therefore \dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AQ}{QC} \Rightarrow \dfrac{AP}{AP} = \dfrac{AQ}{QC}$ [$\because AP = PB$ ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟ ଅନୁଯାୟୀ]

$\Rightarrow 1 = \dfrac{AQ}{QC} \Rightarrow QC = AQ$

ଅର୍ଥାତ୍, L ରେଖା $\overline{AC}$ ବାହୁକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ । (ପ୍ରମାଣିତ)

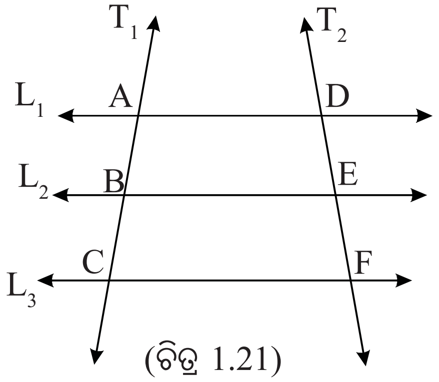
ଅନୁଶୀଳନୀ - 1 (a)

1. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର :

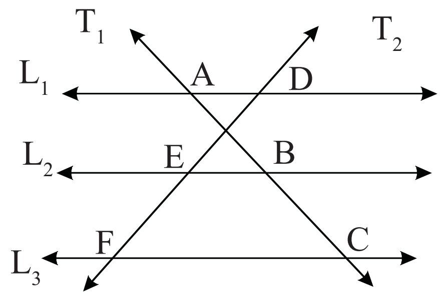
(a) ଚିତ୍ର -1.21 ରେ $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ ଏବଂ T_1 ଓ T_2 ଛେଦକ ।

(i) AB = 2 ସେ.ମି., BC = 3 ସେ.ମି. ଓ DE = 3 ସେ.ମି. ହେଲେ EF = ... ।

(ii) DE = 6 ସେ.ମି., EF = 8 ସେ.ମି. ଓ BC = 6 ସେ.ମି. ହେଲେ, AC = ... ।



(ଚିତ୍ର 1.21)



(ଚିତ୍ର 1.22)

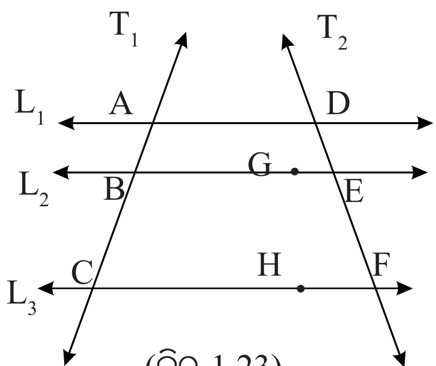
(b) ଚିତ୍ର - 1.22 ରେ $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ ଏବଂ T_1 ଓ T_2 ଛେଦକ ।

(i) AB = 1.5 x BC ହେଲେ, $\frac{EF}{FD}$ = ...

(ii) $\overline{AC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ B ହେଲେ, EF ର ... ଗୁଣ ହେଉଛି FD

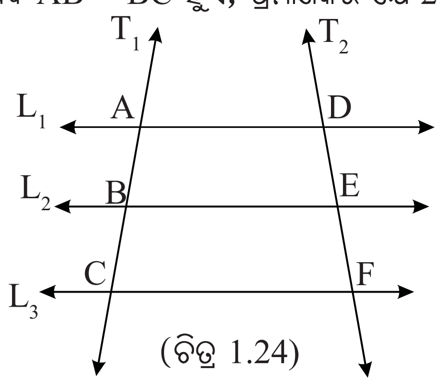
2. ଚିତ୍ର -1.23 ରେ, $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ ଏବଂ T_1 ଓ T_2 ଦୁଇଟି ଛେଦକ । L_2 ଓ L_3 ଉପରେ ଯଥାକ୍ରମେ G ଓ H ବିନ୍ଦୁ ଚିହ୍ନିତ ଯେପରି BG = AD ଏବଂ CH = BE; ପ୍ରମାଣ କର ଯେ (i) DG : EH = DE : EF

(ii) (DG + EH) : EH = DF : EF

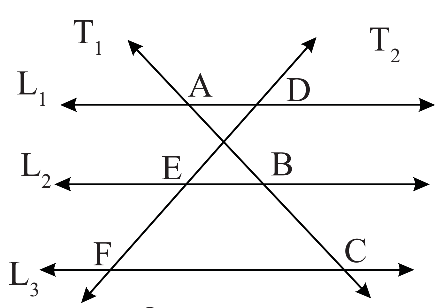


(ଚିତ୍ର 1.23)

3. ଚିତ୍ର - 1.24 ରେ $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ ଏବଂ T_1 ଓ T_2 ଦୁଇଟି ଛେଦକ ଯଦି AB = BC ହୁଏ, ପ୍ରମାଣକର ଯେ 2 BE = AD + CF



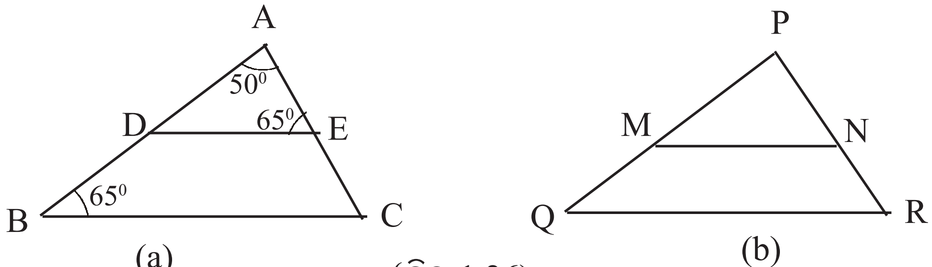
(ଚିତ୍ର 1.24)



(ଚିତ୍ର 1.25)

4. ଚିତ୍ର 1.25 ରେ $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ ଏବଂ T_1 ଓ T_2 ଦୁଇଟି ଛେଦକ । ଯଥାକ୍ରମେ L_1, L_2 ଓ L_3 କୁ ଛେଦକ T_1 ଯଥାକ୍ରମେ A, B ଓ C ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ ଏବଂ L_1, L_2 ଓ L_3 କୁ ଛେଦକ T_2 ଯଥାକ୍ରମେ D, E ଓ F ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । DE= EF ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, CF – AD = 2 EB ।(ସୂଚନା : $\overline{AF}$ ଅଙ୍କନ କର)

5.



(ଚିତ୍ର 1.26)

(i) ଚିତ୍ର - 1.26(a) ରେ A-D-B ଏବଂ A-E-C । $m\angle DAE = 50^0$, $m\angle AED = m\angle ABC = 65^0$ । AD= 3 ସେ.ମି. AE:EC = 2:1 ହେଲେ, $\overline{DB}$ ଓ $\overline{AB}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ii) ଚିତ୍ର -1.26(b) ରେ $\overline{MN} \parallel \overline{QR}$, $NR = \frac{2}{5} PR$ ଏବଂ PQ = 10 ସେ.ମି. ହେଲେ, PM ଓ QM ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iii) ଚିତ୍ର -1.26(b) ରେ $PM = \frac{2}{3} PQ$, NR = 1.2 ସେ.ମି. ଓ $\overline{MN} \parallel \overline{QR}$ ହେଲେ, PR ସ୍ଥିର କର ।

6. (i) ΔABC ରେ, $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଯଥାକ୍ରମେ X ଓ Y ହେଲେ, ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ ।

(ii) ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଗୋଟିଏ ବାହୁର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଅନ୍ୟ ଏକ ବାହୁ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସମାନ୍ତର ରେଖା, ତୃତୀୟ ବାହୁକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ ।

(iii) ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁରୁ ଅନ୍ୟ ଏକ ବାହୁପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ, ଉକ୍ତ ବାହୁକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକରେ, ପ୍ରମାଣ କର ।

7. ΔPQR ରେ, $\overline{PQ}$ ଓ $\overline{QR}$ ବାହୁଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଯଥାକ୍ରମେ M ଓ N । $\overline{PR}$ ଉପରିସ୍ଥ S ଯେକୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣକର ଯେ $\overline{MN}$, $\overline{QS}$ କୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରିବ ।

8. ABCD ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ରେ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ । କର୍ଣ୍ଣ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ ର ଛେଦବିନ୍ଦୁ P ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,

(i) AP : PC = BP : PD (ii) CP : AC = DP : BD

9. ABCD ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ରେ, $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ ଏବଂ $\overline{AD}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ P । $\overline{AB}$ ସହ ସମାନ୍ତର ଭାବେ ଅଙ୍କିତ $\overleftrightarrow{PQ}$, $\overline{BC}$ କୁ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ Q ହେଉଛି $\overline{BC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ।

10. ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ ଓ $\overline{DA}$ ବାହୁମାନଙ୍କର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଯଥାକ୍ରମେ P, Q, R ଓ S ।

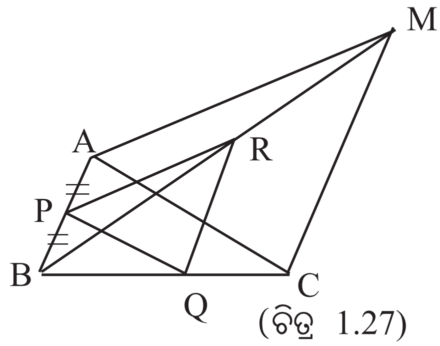
(a) ପ୍ରମାଣ କର ଯେ PQRS ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ।

(b) ଉପରୋକ୍ତ ଚତୁର୍ଭୁଜ ABCD ର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣକର ଯେ, PQRS ଏକ ଆୟତ ଚିତ୍ର ।

11. ଚିତ୍ର - 1.27 ରେ, ΔABC ର $\overline{BA}$ ବାହୁ ସହ $\overline{CM}$ ସମାନ୍ତର, $\overline{AB}$ ର ମଧ୍ୟ ବିନ୍ଦୁ P ।

$\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$, $\overline{QR} \parallel \overline{CM}$;

ପ୍ରମାଣକର ଯେ, $\overline{PR} \parallel \overline{AM}$ ।



(ଚିତ୍ର 1.27)

1.4. ତ୍ରିଭୁଜର କୋଣର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଆଲୋଚନା :

ଉପପାଦ୍ୟ - 3

ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଏକ କୋଣର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ, ସେହି କୋଣର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁକୁ ଯେଉଁ ଦୁଇଟି ରେଖାଖଣ୍ଡରେ ଭାଗକରେ, ସେମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନୁପାତ, ଅନୁରୂପ ସଂଲଗ୍ନ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନୁପାତ ସଙ୍ଗେ ସମାନ ।

(The bisector of an angle of a triangle divides the side opposite to the angle into two segments whose lengths are proportional to the lengths of the corresponding adjacent sides.)

ଦତ୍ତ : ΔABC ରେ, $\angle BAC$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overrightarrow{AX}$, $\overline{BC}$ ବାହୁକୁ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ ।

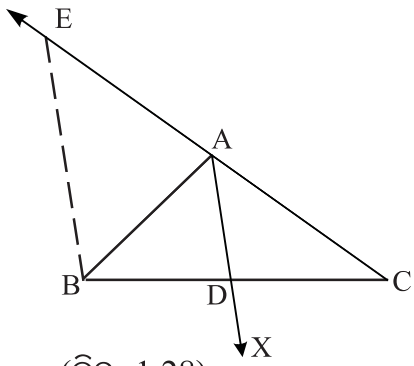
ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{AB}{AC}$

ଅଙ୍କନ : $\overrightarrow{CA}$ ଉପରେ ଏପରି ଏକ ବିନ୍ଦୁ E ଚିହ୍ନଟ କରାଯାଉ, ଯେପରିକି C - A- E ଏବଂ $\overline{BE} \parallel \overline{DA}$ ।

ପ୍ରମାଣ : $\overline{EB} \parallel \overline{AD}$ ଏବଂ $\overline{EC}$ ଏକ ଛେଦକ ।

$\therefore$ ଅନୁରୂପ ହେତୁ $\angle BEA \cong \angle DAC$ ....(1)

ପୁନଶ୍ଚ, $\overline{EB} \parallel \overline{AD}$ ଏବଂ $\overline{AB}$ ଏକ ଛେଦକ ।



(ଚିତ୍ର 1.28)

$\therefore$ ଏକାନ୍ତର $\angle ABE \cong \angle BAD$ ....(2)

ମାତ୍ର $\angle BAD \cong \angle DAC$ ....(3) ($\angle BAC$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overrightarrow{AX}$ ହେତୁ)

(2) ଓ (3) $\Rightarrow \angle ABE \cong \angle DAC$ ......(4)

(1) ଓ (4) $\Rightarrow \angle BEA \cong \angle ABE$

$\therefore \Delta ABE$ ରେ $AE = AB$ ......(5) (ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ସର୍ବସମ କୋଣର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁ ହେତୁ)

ΔEBC ରେ $\overline{AD} \parallel \overline{EB}$ (ଅଙ୍କନ ଅନୁଯାୟୀ)

$\therefore \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{EA}{AC}$ (ଉପପାଦ୍ୟ - 1 ଅନୁଯାୟୀ)

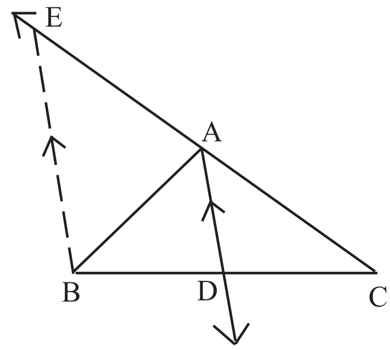
$\Rightarrow \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$ [(5) ଅନୁଯାୟୀ] (ପ୍ରମାଣିତ)

ପ୍ରମେୟ - 1.2 : (ଉପପାଦ୍ୟ - 3 ର ବିପରୀତ କଥନ ଓ ପ୍ରମାଣ) :

ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର କୌଣସି ଏକ କୋଣର ଶୀର୍ଷରୁ ଅଙ୍କିତ ରଶ୍ମି ଉକ୍ତ କୋଣର ବିପରୀତ ବାହୁକୁ ଯେଉଁ ଦୁଇଟି ଅଂଶରେ ଭାଗ କରେ, ସେ ଦୁଇଟିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ଅନୁରୂପ ସଂଲଗ୍ନ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସହ ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, ରଶ୍ମିଟି ସମ୍ପୃକ୍ତ କୋଣକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ ।

(If a ray drawn from the vertex of an angle of a triangle divides the side opposite to the angle into two segments such that their lengths are proportional to the lengths of the corresponding adjacent sides, then the ray bisects the angle concerned.)

ଦତ୍ତ : ΔABC ରେ $\angle BAC$ ର ଶୀର୍ଷ A ରୁ ଅଙ୍କିତ $\overrightarrow{AD}$, $\overline{BC}$ ବାହୁକୁ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରେ ଯେପରିକି, $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$



(ଚିତ୍ର 1.29)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\overrightarrow{AD}$, $\angle BAC$ କୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ ।

ଅଙ୍କନ : $\overrightarrow{CA}$ ଉପରେ E ଏପରି ଏକ ବିନ୍ଦୁ, ଯେପରିକି C-A-E ଏବଂ AE = AB । $\overline{BE}$ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ ।

ପ୍ରମାଣ : $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ (ଦତ୍ତ)

$\Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AE}{AC}$ ($\because$ AB = AE : ଅଙ୍କନ)

$\therefore$ ΔEBC ରେ $\overrightarrow{AD} \parallel \overline{EB}$ (ଉପପାଦ୍ୟ - 2 ଦ୍ୱାରା)

ଏକାନ୍ତର $\angle EBA \cong \angle BAD$ ...... (1) ($\overrightarrow{AD} \parallel \overline{EB}$ ଓ $\overline{AB}$ ଛେଦକ)

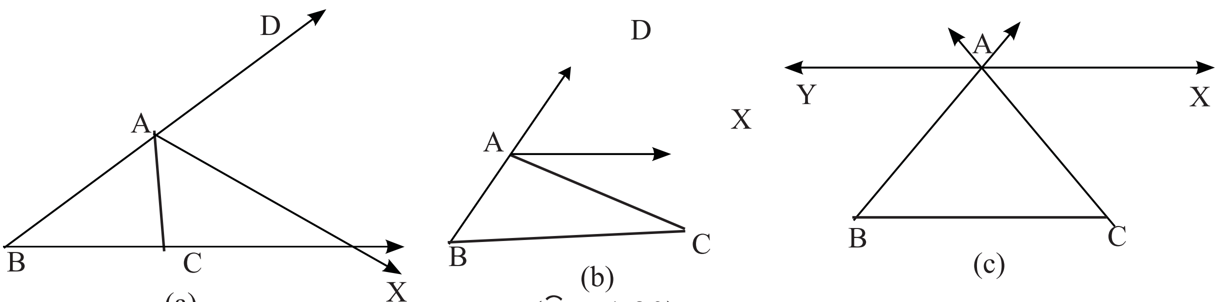
ଏବଂ $\angle BEA \cong \angle DAC$ .... (2) ($\overrightarrow{AD} \parallel \overline{EB}$ ଓ $\overline{EC}$ ଛେଦକ)

ମାତ୍ର $\angle EBA \cong \angle BEA$ (ଅଙ୍କନ)

$\therefore$ (1) ଓ (2)$\Rightarrow \angle BAD \cong \angle DAC$ ଅର୍ଥାତ୍ $\overrightarrow{AD}$, $\angle BAD$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ (ପ୍ରମାଣିତ)

1.4.1 ତ୍ରିଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ :

ତ୍ରିଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଦ୍ୱାରା ନିରୂପିତ ସମାନୁପାତ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।



(ଚିତ୍ର 1.30)

ଚିତ୍ର - 1.30(a) ରେ ΔABC ରେ $\angle CAD$, A ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ଠାରେ ଏକ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ ଏବଂ $\overrightarrow{AX}$ ଉକ୍ତ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ । $\overrightarrow{AX}$ କୁ $\angle BAC$ ର ଏକ **ବହିଃସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ** କୁହାଯାଏ ।

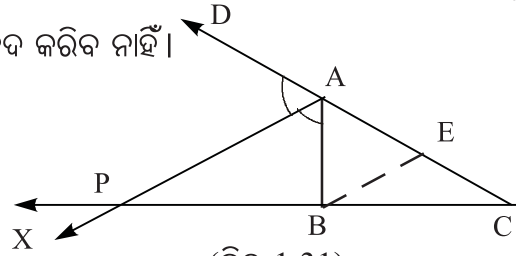
ସେହିପରି, ଚିତ୍ର 1.30(b) ରେ $\angle BAC$ ର ବହିଃସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overrightarrow{AX}$ ଏବଂ ଚିତ୍ର 1.30(c) ରେ A ଶୀର୍ଷ ଠାରେ ଦୁଇଟି ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ ଦର୍ଶାଯାଇ ପ୍ରତ୍ୟେକର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇଛି । ଏଣୁ ଏଠାରେ $\angle BAC$ ର ଦୁଇଟି ବହିଃସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ହେଉଛି $\overrightarrow{AX}$ ଏବଂ $\overrightarrow{AY}$ ।

ସେହି ଚିତ୍ର ତିନୋଟିକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟକଲେ ଦେଖିବା :

(i) ଚିତ୍ର 1.30(a) ରେ ଥିବା ΔABC ର $AB > AC$ । $\overline{AC}$ ବାହୁ ସହ ସଂଲଗ୍ନ ବହିଃସ୍ଥ $\angle CAD$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overrightarrow{AX}$, $\overrightarrow{BC}$ ରଶ୍ମିକୁ ଛେଦ କରୁଛି ।

(ii) ଚିତ୍ର 1.30(b) ରେ ଥିବା ΔABC ର $AC > AB$, $\overline{AC}$ ସଂଲଗ୍ନ ବହିଃସ୍ଥ $\angle CAD$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overrightarrow{AX}$, $\overline{BC}$ ବା $\overrightarrow{BC}$ କୌଣସିଟିକୁ ଛେଦ କରିବ ବୋଲି ଜଣାପଡୁ ନାହିଁ ।

(iii) ଚିତ୍ର 1.30(c) ରେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ । ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଲକ୍ଷ୍ୟକଲେ ଦେଖିବା ଯେ A ଶୀର୍ଷଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣଦ୍ୱୟର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overrightarrow{AX}$ ଏବଂ $\overrightarrow{AY}$ ପ୍ରତ୍ୟେକ $\overline{BC}$ ସହ ସମାନ୍ତର । ଏଣୁ ଉପରୋକ୍ତ କୌଣସି ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overline{BC}$ ବା $\overrightarrow{BC}$ ବା $\overrightarrow{CB}$ କୁ ଛେଦ କରିବ ନାହିଁ।



(ଚିତ୍ର 1.31)

ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର - 1.31ରେ ତ୍ରିଭୁଜର ଏକ କୋଣର ବହିଃସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ, ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁକୁ ଯେଉଁ ଦୁଇ ଭାଗରେ ପରିଣତ କରେ, ସେ ଦୁଇଟିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସହ ଅନୁରୂପ ସଂଲଗ୍ନ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର କ'ଣ ସମ୍ପର୍କ ଅଛି ଦେଖିବା ।

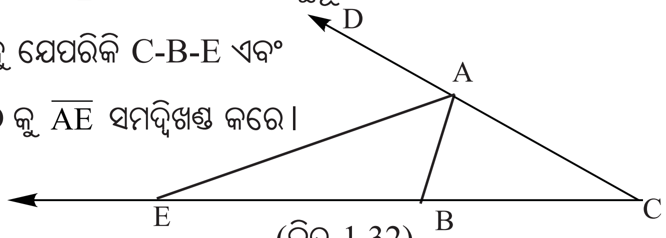
ଏହିପରି ଏକ ΔABC (ଯେଉଁଥିରେ $AC > AB$) ନିଜେ ଅଙ୍କନ କର ଏବଂ A ଶୀର୍ଷରେ ବହିଃସ୍ଥ $\angle BAD$ ଅଙ୍କନ କର (ଚିତ୍ର -1.31 ଦେଖ)। ଏହି ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overrightarrow{AX}$ ଅଙ୍କନ କର ଯେପରି ଏହା $\overrightarrow{CB}$ କୁ ଛେଦ କରିବ । ଛେଦ ବିନ୍ଦୁର ନାମ P ଦିଅ । ଏଠାରେ $\overrightarrow{AX}$, $\overline{CB}$ କୁ P ବିନ୍ଦୁରେ **ବହିର୍ବିଭାଜନ** କରିଛି ବୋଲି କୁହାଯାଏ । $\overline{CB}$ ର ବହିର୍ବିଭାଜନରୁ ଉତ୍ପନ୍ନ ଅଂଶ ଦୁଇଟି ହେଲା $\overline{CP}$ ଏବଂ $\overline{BP}$ । B ବିନ୍ଦୁଠାରେ $\overline{AP}$ ସହିତ ସମାନ୍ତର ରେଖା ଅଙ୍କନ କର ଯେପରି ତାହା $\overline{AC}$ କୁ E ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ । ବର୍ତ୍ତମାନ ତୁମେ ଉପପାଦ୍ୟ-3ର ଅନୁରୂପ ଧାରାରେ ପ୍ରମାଣ କରିପାରିବ ଯେ $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BP}{CP}$ ।

ଅର୍ଥାତ୍ ତ୍ରିଭୁଜର ଏକ କୋଣର ବହିଃସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ନିମନ୍ତେ ଉପପାଦ୍ୟ – 3 ମଧ୍ୟ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ।

ତ୍ରିଭୁଜର ଏକ କୋଣର ବହିଃ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ନିମନ୍ତେ ପ୍ରମେୟ – 1.2ର ଅନୁରୂପ ସିଦ୍ଧାନ୍ତ ହେଲା –

ΔABC, $\overrightarrow{CB}$ ଉପରେ E ଏପରି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଯେପରିକି C-B-E ଏବଂ

$EB : EC = AB : AC$ ହେଲେ, $\angle BAD$ କୁ $\overline{AE}$ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ।



(ଚିତ୍ର 1.32)

B ଠାରେ $\overline{AE}$ ସହିତ ସମାନ୍ତର ରେଖା ଅଙ୍କନ କରି ପ୍ରମେୟ - 1.2ର ଅନୁରୂପ ଧାରାରେ ଏହା ପ୍ରମାଣ କରିପାରିବ ।

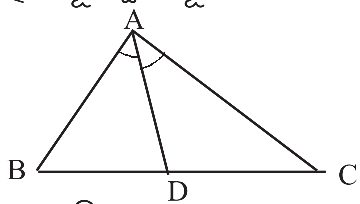
ଏଣୁ ଆମେ ଜାଣିଲେ- **ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନୁପାତରେ ତୃତୀୟ ବାହୁକୁ ବହିର୍ବିଭାଜନ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁ ଓ ଏହି ବାହୁର ବିପରୀତ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଦ୍ୱାରା ସେହି ଶୀର୍ଷରେ ଥିବା ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡିତ ହୁଏ ।** ଅର୍ଥାତ୍ ପ୍ରମେୟ-1.2, ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର କୌଣସି ବାହୁର ବହିର୍ବିଭାଜନ ପାଇଁ ମଧ୍ୟ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1 (b)

1. ଚିତ୍ର 1.33 ରେ Δ ABC ର $\overline{BC}$ ବାହୁ ଉପରିସ୍ଥ D ଏକ ବିନ୍ଦୁ, ଯେପରିକି $\overline{AD}$, $\angle$BAC ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ । ତଳେ ଥିବା ଅନୁପାତ ମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଅନୁପାତଟି ବାଛି ନିମ୍ନରେ ଥିବା ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

   Δ ABD ଓ Δ ADC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଅନୁପାତ ....

   (AB : DC, BD : AC, AB : AC, AD : BC)

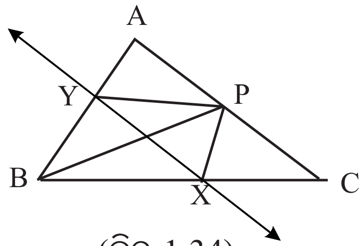


(ଚିତ୍ର 1.33)

2. Δ ABC ର $\angle$ABC ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overline{AC}$ ବାହୁକୁ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । AB = 4 ସେ.ମି., BC = 6 ସେ.ମି. ଏବଂ AC = 5 ସେ.ମି. ହେଲେ, AD ଓ CD ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3. Δ ABC ର $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ଓ $\overline{CA}$ ବାହୁ ତ୍ରୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟକୁ ଯଥାକ୍ରମେ c, a ଓ b ଏକକ ରୂପେ ସୂଚିତ କରାଯାଏ । $\angle$ACB ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overline{AB}$ କୁ M ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,

   (i) $AM = \frac{bc}{a+b}$ (ii) $BM = \frac{ca}{a+b}$



(ଚିତ୍ର 1.34)

4. (i) ଚିତ୍ର -1.34 ରେ, Δ ABC ର $\overline{AC}$ ବାହୁ ପ୍ରତି ମଧ୍ୟମା $\overline{BP}$ । $\angle$BPC ଏବଂ $\angle$BPA ର ଅନ୍ତଃସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{BC}$ ଓ $\overline{AB}$ କୁ X ଓ Y ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\overleftrightarrow{XY} \parallel \overline{AC}$ ।

   (ii) ଚିତ୍ର -1.34 ରେ, $\angle$APB ଏବଂ $\angle$BPC ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ମାନ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{BC}$ କୁ ଯଥାକ୍ରମେ Y ଓ X ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ଯଦି $\overleftrightarrow{XY} \parallel \overline{AC}$ ହୁଏ, ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, P, $\overline{AC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ।

5. ଚିତ୍ର -1.34 ରେ Δ ABC ର $\overleftrightarrow{BP}$ ମଧ୍ୟମା । $\angle$APBର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overleftrightarrow{PY}$, $\overline{AB}$ କୁ Y ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । $\overline{AC}$ ସହ ସମାନ୍ତର କରି Y ବିନ୍ଦୁରେ $\overleftrightarrow{YX}$ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇଛି, ଯେପରି ତାହା $\overline{BC}$ କୁ X ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଛି । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $\overrightarrow{PX}$, $\angle$BPC ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ।

6. Δ ABC ରେ $\angle$BAC ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ, $\overline{BC}$ କୁ P ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରେ ଏବଂ $\angle$ABC ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overline{AP}$ କୁ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\frac{AQ}{QP} = \frac{AB + AC}{BC}$ ।

7. ABCD ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର $\angle$BAD ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ, $\overline{BD}$ କର୍ଣ୍ଣକୁ K ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରେ ଏବଂ $\angle$ABC ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ, $\overline{AC}$ କର୍ଣ୍ଣକୁ L ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\overleftrightarrow{LK} \parallel \overline{AB}$ ।

8. ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର $\angle$DAB ଓ $\angle$DCB କୋଣଦ୍ୱୟର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ପରସ୍ପରକୁ $\overline{BD}$ କର୍ଣ୍ଣ ଉପରେ ଛେଦକରନ୍ତି । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\angle$ABC ଓ $\angle$ADC ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ $\overline{AC}$ କର୍ଣ୍ଣ ଉପରେ ଛେଦ କରିବେ ।

9. Δ ABC ରେ $\angle$B ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ, $\overline{AC}$ କୁ E ବିନ୍ଦୁରେ ଏବଂ $\angle$C ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overline{AB}$ କୁ F ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । $\overline{FE} \parallel \overline{BC}$ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, ΔABC ସମଦ୍ୱିବାହୁ ।

10. Δ ABC ରେ $\angle$A, $\angle$B ଓ $\angle$Cର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ, $\overline{BC}, \overline{CA}$ ଓ $\overline{AB}$ କୁ ଯଥାକ୍ରମେ D,E ଓ F ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$ ।

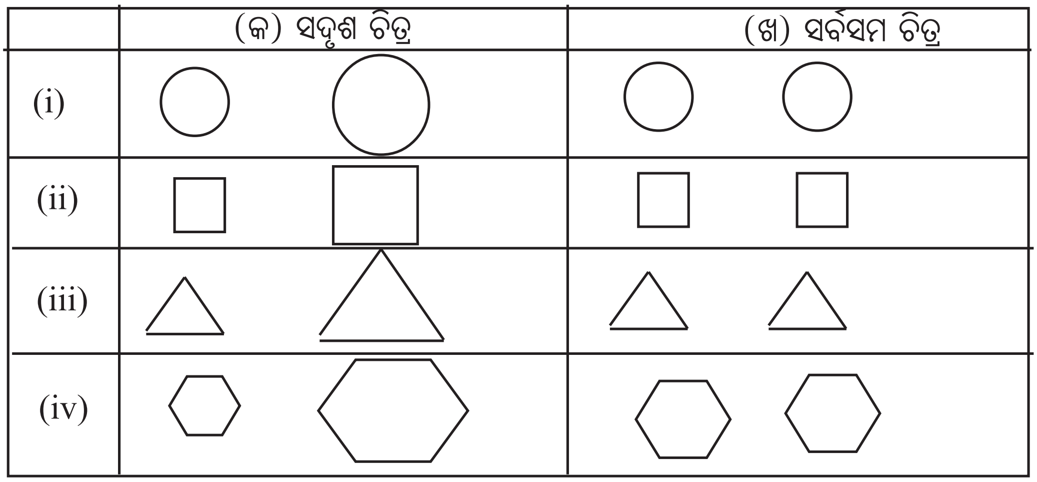
1.5 ଜ୍ୟାମିତିକ ଚିତ୍ର ମଧ୍ୟରେ ସାଦୃଶ୍ୟ (Similarity in Geometrical figures) :

କୌଣସି ଗୋଟିଏ ବସ୍ତୁ ବା ଚିତ୍ରକୁ ଦେଖିଲେ, ଆମେ ସେ ବସ୍ତୁ ବା ଚିତ୍ରଟି ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଦୁଇଟି ଧାରଣା କରିଥାଉ । ଯଥା – (i) ବସ୍ତୁ ବା ଚିତ୍ରଟି କିପରି ଦେଖାଯାଉଛି, ଅର୍ଥାତ୍ ତା'ର **ଆକୃତି** (shape) କିପରି;

(ii) ବସ୍ତୁ ବା ଚିତ୍ରଟି, କେତେ ବଡ଼, ଅର୍ଥାତ୍ ତା'ର **ଆକାର** (size) କେତେ;

ଦୁଇଟି ଜ୍ୟାମିତିକ ଚିତ୍ରର ଆକୃତି ତଥା ଆକାର ଉଭୟ ଅଭିନ୍ନ ହେଲେ, ସେ ଦୁଇଟିକୁ ସର୍ବସମ ଚିତ୍ର (Congruent figure) କୁହାଯାଏ, ଏ କଥା ତୁମେ ଜାଣିଛ ।

ସଂଜ୍ଞା : ଚିତ୍ର ଦୁଇଟିର ଆକାର ସମାନ ବା ଅସମାନ ହେଉ, ଯଦି ଉଭୟ ଚିତ୍ରର ଆକୃତି ସମାନ ହୁଏ, ତେବେ ଚିତ୍ର ଦୁଇଟିକୁ ସଦୃଶ (similar) ଚିତ୍ର କୁହାଯାଏ ।



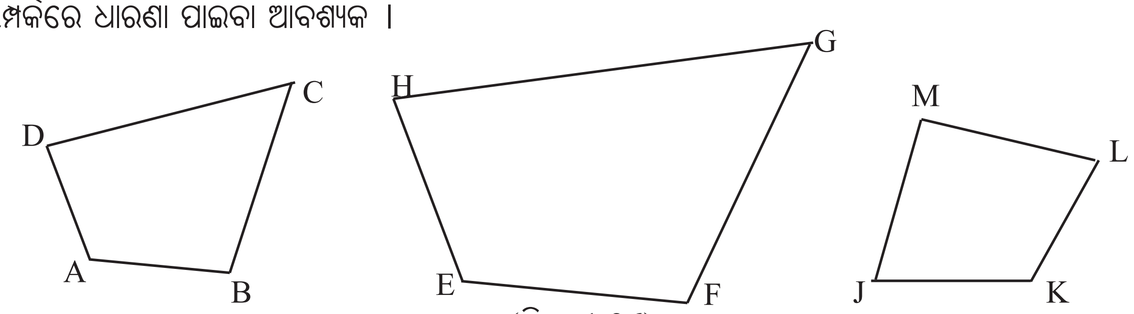
(ଚିତ୍ର 1.35)

ଚିତ୍ର -1.35 ରେ (କ) ସ୍ତମ୍ଭରେ ଚିତ୍ରଗୁଡ଼ିକ ସଦୃଶ ଅଟନ୍ତି ଏବଂ (ଖ) ସ୍ତମ୍ଭରେ ଥିବା ଚିତ୍ରଗୁଡ଼ିକ ସର୍ବସମ ଅଟନ୍ତି । ସଂଜ୍ଞାରୁ ଏହା ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ, **ଦୁଇଟି ସଦୃଶ ଚିତ୍ର ସର୍ବସମ ନ ହୋଇପାରନ୍ତି କିନ୍ତୁ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଚିତ୍ର ସର୍ବଦା ସଦୃଶ ଅଟନ୍ତି ।**

ତୁମେ ଜାଣିଛ ଯେ ଗୋଟିଏ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜର ବାହୁଗୁଡ଼ିକ ସମଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ଏବଂ କୋଣଗୁଡ଼ିକ ସମ ପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ । ସୁତରାଂ **ଦୁଇଟି ସମାନ ସଂଖ୍ୟକ ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜ ସଦୃଶ ଅଟନ୍ତି ।**

1.5.1 ସାଦୃଶ୍ୟର ସର୍ତ୍ତ (Conditions for Similarity) :

ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜ କେଉଁ କାରଣରୁ ସଦୃଶ ହେବେ ତାହା ଆଲୋଚନା କରିବା ପୂର୍ବରୁ ଦୁଇଟି ବହୁଭୁଜର ସାଦୃଶ୍ୟ ସମ୍ପର୍କରେ ଧାରଣା ପାଇବା ଆବଶ୍ୟକ ।



(ଚିତ୍ର 1.36)

ବର୍ତ୍ତମାନ୍ ଚିତ୍ର 1.36 ରେ ABCD ଓ EFGH ଦୁଇଟି ସଦୃଶ ଚତୁର୍ଭୁଜ । ମାତ୍ର ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ କେହି ହେଲେ JKLM ଚତୁର୍ଭୁଜ ସହିତ ସଦୃଶ ନୁହେଁ । ABCD ଓ EFGH ଚତୁର୍ଭୁଜ ଦ୍ୱୟର ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କରେ ଥିବା କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣ ମାପି ତୁଳନା କଲେ ଆମେ ଦେଖିବା -

(i) $\angle A \cong \angle E, \angle B \cong \angle F, \angle C \cong \angle G, \angle D \cong \angle H$ ଏବଂ **(ii)** $\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE}$

ଏଠାରେ A ଓ E, B ଓ F, C ଓ G ଏବଂ D ଓ H ଶୀର୍ଷ ଯୋଡ଼ିମାନଙ୍କୁ **ଅନୁରୂପ ଶୀର୍ଷ (Corresponding Vertices)** କୁହାଯାଏ । ଯଥା - ଶୀର୍ଷ A ର ଅନୁରୂପ ଶୀର୍ଷ ହେଲା ଶୀର୍ଷ E, B ର ଅନୁରୂପ ଶୀର୍ଷ ହେଲା F ଇତ୍ୟାଦି । ଅନୁରୂପ ଶୀର୍ଷ ମାନଙ୍କରେ ଥିବା କୋଣମାନ ଅନୁରୂପ । ଯଥା ∠A ର ଅନୁରୂପ କୋଣ ହେଲା, ∠E, ∠B ର ଅନୁରୂପ କୋଣ ∠F ଇତ୍ୟାଦି । ଅନୁରୂପ ଶୀର୍ଷ ଯୋଡ଼ିମାନଙ୍କୁ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ରୂପେ ନେଇ ଉତ୍ପନ୍ନ ହେଉଥିବା ବାହୁମାନଙ୍କୁ **ଅନୁରୂପ ବାହୁ (Corresponding Sides)** କୁହାଯାଏ । ଯଥା -

A $\longleftrightarrow$ (ଅନୁରୂପ) E
B $\longleftrightarrow$ (ଅନୁରୂପ) F
$\Rightarrow$ $\overline{AB}$ ଅନୁରୂପ $\overline{EF}$

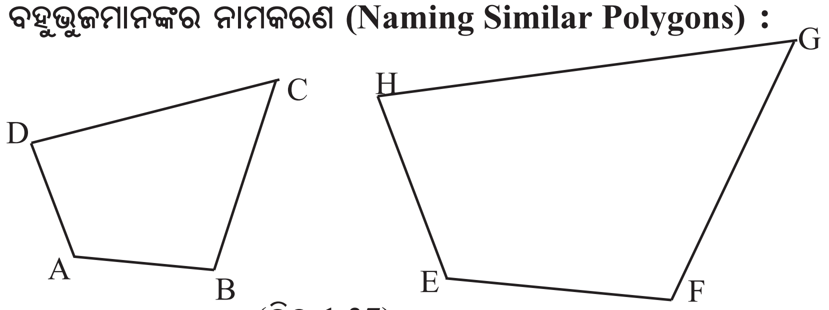
ସେହିପରି $\overline{BC}$ ଅନୁରୂପ $\overline{FG}$, $\overline{CD}$ ଅନୁରୂପ $\overline{GH}$ ଇତ୍ୟାଦି ।

ସାଦୃଶ୍ୟର ସଙ୍କେତ ନେଇ ଆମେ ଲେଖିବା : ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ ~ EFGH ଚତୁର୍ଭୁଜ

ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ ଏବଂ EFGH ଚତୁର୍ଭୁଜ କ୍ଷେତ୍ରରେ (i) ସହ (ii) ସର୍ତ୍ତ ପୂରଣ ହେଉଥାଏ ତେବେ ABCD ଓ EFGH ଚତୁର୍ଭୁଜଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ସଦୃଶ ହେବେ । ଅନୁରୂପ ଭାବରେ ପଞ୍ଚଭୁଜ, ଷଡ଼ଭୁଜ ବା ଅନ୍ୟାନ୍ୟ ବହୁଭୁଜମାନଙ୍କର ସାଦୃଶ୍ୟର ସର୍ତ୍ତ ଉଲ୍ଲେଖ କରିପାରିବା ।

ସଦୃଶ ବହୁଭୁଜ : ସମାନ ସଂଖ୍ୟକ ବାହୁଥିବା ଦୁଇଟି ବହୁଭୁଜ ସଦୃଶ ହେବେ ଯଦି ସେମାନଙ୍କର (i) ଅନୁରୂପ କୋଣମାନେ ସର୍ବସମ ଏବଂ (ii) ଅନୁରୂପ ବାହୁମାନେ ସମାନୁପାତୀ ।

1.5.2 ସଦୃଶ ବହୁଭୁଜମାନଙ୍କର ନାମକରଣ (Naming Similar Polygons) :



(ଚିତ୍ର 1.37)

ଚିତ୍ର - 1.37 ରେ ABCD ଓ EFGH ର ସାଦୃଶ୍ୟ ଦର୍ଶାଇ ABCD ଚର୍ତୁଭୁଜ ~ EFGH ଚତୁର୍ଭୁଜ ଲେଖିବା ସମୟରେ ଅନୁରୂପ ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକୁ ସେମାନଙ୍କର କ୍ରମ ରକ୍ଷା କରି ଲେଖା ଯାଇଥାଏ । କାରଣ ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ $A \leftrightarrow E$, $B \leftrightarrow F$, $C \leftrightarrow G$ ଏବଂ $D \leftrightarrow H$ । ABCD ଚର୍ତୁଭୁଜ ଓ EFGH ଚର୍ତୁଭୁଜ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସାଦୃଶ୍ୟକୁ ଆମେ ସଂକେତରେ ଲେଖିପାରିବା ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ ~ EFGH ଚତୁର୍ଭୁଜ କିମ୍ବା BCDA ଚତୁର୍ଭୁଜ ~ FGHE ଚତୁର୍ଭୁଜ କିମ୍ବା CDAB ଚର୍ତୁଭୁଜ ~ GHEF ଚତୁର୍ଭୁଜ ଇତ୍ୟାଦି । କିନ୍ତୁ ABCD ଚର୍ତୁଭୁଜ ~ GHEF ଚର୍ତୁଭୁଜ ଲେଖିବା ଠିକ୍ ନୁହେଁ ।

1.6 ତ୍ରିଭୁଜମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ସାଦୃଶ୍ୟ (Similarity in Triangles) :

ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଭାବରେ ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜ ମଧ୍ୟରେ ସାଦୃଶ୍ୟ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

ତ୍ରିଭୁଜ ମଧ୍ୟ ଏକ ବହୁଭୁଜ (ଯାହାର ବାହୁ ସଂଖ୍ୟା ତିନି) । ଏଣୁ ସଦୃଶ ତ୍ରିଭୁଜର ସଂଜ୍ଞା ମଧ୍ୟ ସଦୃଶ ବହୁଭୁଜର ସଂଜ୍ଞାର ଅନୁରୂପ । ଏଣୁ ଆମେ କହିବା ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜ ସଦୃଶ ହେବେ, ଯଦି ତ୍ରିଭୁଜ ଦୁଇଟିର -

(1) ଅନୁରୂପ ବାହୁମାନ ସମାନୁପାତୀ; (2) ଅନୁରୂପ କୋଣମାନ ସର୍ବସମ ।

ଯଥା : ΔABC ଓ ΔPQR ମଧ୍ୟରେ $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}$ ଏବଂ $\angle A \cong \angle P$, $\angle B \cong \angle Q$, $\angle C \cong \angle R$ ହେଲେ, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ହେବ ।

ତ୍ରିଭୁଜଦ୍ୱୟ କ୍ଷେତ୍ରରେ - ଅନୁରୂପ ଶୀର୍ଷ : $A \leftrightarrow P$, $B \leftrightarrow Q$, $C \leftrightarrow R$

ଅନୁରୂପ ବାହୁ : $\overline{AB} \leftrightarrow \overline{PQ}$, $\overline{BC} \leftrightarrow \overline{QR}$, $\overline{CA} \leftrightarrow \overline{RP}$

ଅନୁରୂପ କୋଣ : $\angle A \leftrightarrow \angle P$, $\angle B \leftrightarrow \angle Q$, $\angle C \leftrightarrow \angle R$

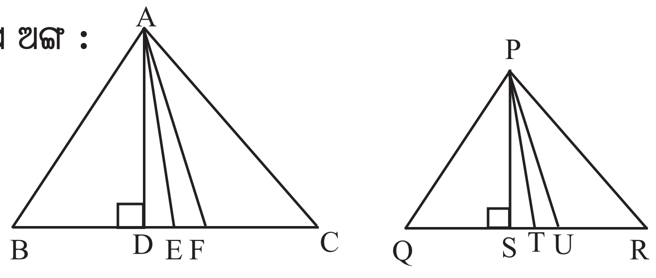
ସଦୃଶ ତ୍ରିଭୁଜ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଅନ୍ୟାନ୍ୟ ଅନୁରୂପ ଅଙ୍ଗ :

ଚିତ୍ର -1.38 ରେ, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ।

ΔABCରେ, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ।

$\overline{AF}$, $\angle BAC$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ।

$\overline{AE}$, $\overline{BC}$ ପ୍ରତି ମଧ୍ୟମା ।



(ଚିତ୍ର 1.38)

ସେହିପରି ΔPQR ରେ, $\overline{PS}$, $\overline{QR}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ।

$\overline{PU}$, $\angle QPR$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ । $\overline{PT}$, $\overline{QR}$ ପ୍ରତି ମଧ୍ୟମା ।

ଅନୁରୂପ ଶୀର୍ଷ A ଓ P ରୁ ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହେତୁ $\overline{AD}$ ଓ $\overline{PS}$ ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟର **ଅନୁରୂପ ଉଚ୍ଚତା;**

ଅନୁରୂପ ଶୀର୍ଷରୁ ଅଙ୍କିତ ମଧ୍ୟମା କାରଣରୁ, $\overline{AE}$ ଓ $\overline{PT}$, ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟର **ଅନୁରୂପ ମଧ୍ୟମା;**

ଏବଂ $\overline{AF}$ ଓ $\overline{PU}$ ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟର **ଅନୁରୂପ କୋଣ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ।**

ଆଉ ଦୁଇ ଯୋଡ଼ା ଅନୁରୂପ ଲମ୍ବ, ଦୁଇଯୋଡ଼ା ଅନୁରୂପ ମଧ୍ୟମା, ଦୁଇଯୋଡ଼ା ଅନୁରୂପ କୋଣ-ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ମଧ୍ୟ ଅଛି । ନିଜେ ସେଗୁଡ଼ିକୁ ଚିତ୍ରକରି ଦେଖାଇବାକୁ ଚେଷ୍ଟା କର ।

ତ୍ରିଭୁଜ ସାଦୃଶ୍ୟ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତୋଟି ଧର୍ମ :

(i) ପ୍ରତ୍ୟେକ ତ୍ରିଭୁଜ ନିଜ ସହ ସଦୃଶ, ଅର୍ଥାତ୍ $\Delta ABC \sim \Delta ABC$

(ii) $\Delta ABC \sim \Delta PQR \Leftrightarrow \Delta PQR \sim \Delta ABC$

(iii) $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, $\Delta DEF \sim \Delta PQR \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta PQR$

ସାଦୃଶ୍ୟ ଧର୍ମ ଅନୁଯାୟୀ (i), (ii) ଏବଂ (iii) କୁ ଯଥାକ୍ରମେ ସାଦୃଶ୍ୟର ସ୍ୱତୁଲ୍ୟ, ପ୍ରତିସମ ଏବଂ ସଂକ୍ରମୀ ଧର୍ମ କୁହାଯାଏ । ଉକ୍ତ ଧର୍ମଗୁଡ଼ିକର ଗାଣିତିକ ବ୍ୟବହାର ଦୃଷ୍ଟିରୁ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଗୁରୁତ୍ୱ ରହିଛି ।

ପରବର୍ତ୍ତୀ ଉପପାଦ୍ୟ ବ୍ୟବହାର କରି ଏଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରମାଣ ସହଜରେ କରାଯାଇପାରିବ ।

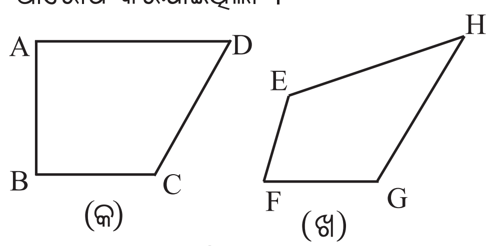
1.6.1 ତ୍ରିଭୁଜର ସାଦୃଶ୍ୟ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ସର୍ତ୍ତ (Conditions on Triangle-Similarity) :

ଦୁଇଟି ବହୁଭୁଜର ସାଦୃଶ୍ୟ ଲାଗି ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ଦୁଇଟି ସର୍ତ୍ତ ଆରୋପ କରଯାଇଥିଲା ।

1. ଅନୁରୂପ ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମାନୁପାତିତା,

2. ଅନୁରୂପ କୋଣମାନଙ୍କର ସର୍ବସମତା ।

ଆସ ଦେଖିବା ସର୍ତ୍ତଦ୍ୱୟ କିପରି ପରସ୍ପର ନିରପେକ୍ଷ ଅଥବା ପରସ୍ପର ନିର୍ଭରଶୀଳ । ନିମ୍ନ ପରୀକ୍ଷାଗୁଡ଼ିକୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କର ।



(ଚିତ୍ର 1.39)

ପରୀକ୍ଷା - 1.

କେବଳ ସର୍ତ୍ତ - 1 କୁ ସିଦ୍ଧ କରୁଥିବା ଦୁଇଟି ଚତୁର୍ଭୁଜ ଚିତ୍ର 1.39 ରେ ନିଆଯାଇଛି ।

ଚିତ୍ର -1.39 (କ) ରେ $m\angle ABC = 90^0$, $AB = BC = 1$ ଏକକ ଏବଂ $AD = CD = 2$ ଏକକ ନେଇ ଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କିତ ହୋଇଛି ।

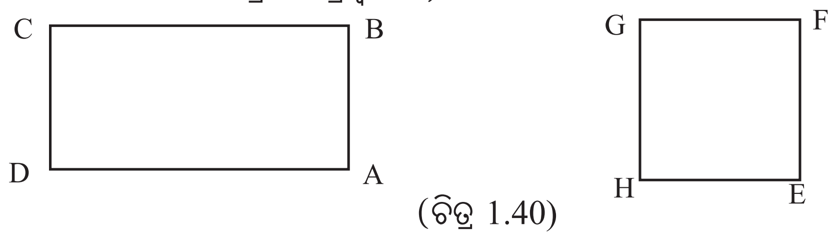
ଚିତ୍ର 1.39 (ଖ) ରେ $m\angle EFG = 45^0$, $EF = FG = 2$ ଏକକ ଏବଂ $EH = GH = 4$ ଏକକ ନେଇ ଚତୁର୍ଭୁଜ EFGH ଅଙ୍କିତ ହୋଇଛି ।

ଏହା ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ $\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE}$;

କିନ୍ତୁ ଅନୁରୂପ କୋଣଗୁଡ଼ିକ ସର୍ବସମ ନୁହଁନ୍ତି, ଯଥା : $\angle B$ ଓ $\angle F$ ସର୍ବସମ ନୁହଁନ୍ତି ।

ପରୀକ୍ଷା - 2

କେବଳ ସର୍ତ୍ତ - 2 କୁ ସିଦ୍ଧକରୁଥିବା ଦୁଇଟି ଚତୁର୍ଭୁଜ ଚିତ୍ର -1.40 ରେ ନିଆଯାଇଛି । ଏଠାରେ ABCD ଏକ ଆୟତଚିତ୍ର ଏବଂ EFGH ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ର । ଚିତ୍ରଦ୍ୱୟରେ, AB = EF ।



(ଚିତ୍ର 1.40)

ଏହା ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ ABCD ଓ EFGH ଚତୁର୍ଭୁଜ ଦୁଇଟିର ଅନୁରୂପ କୋଣମାନ ସର୍ବସମ (ପ୍ରତ୍ୟେକ ଏକ ସମକୋଣ), କିନ୍ତୁ ଅନୁରୂପ ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନୁପାତ ଗୁଡ଼ିକ ସମାନ ନୁହନ୍ତି । ଯଥା $\frac{AB}{EF} = 1$, କିନ୍ତୁ $\frac{BC}{FG} \neq 1$

ଉଭୟ ପରୀକ୍ଷାରୁ ହୃଦ୍‌ବୋଧ ହୋଇଥିବ ଯେ ଦୁଇଟି ଚତୁର୍ଭୁଜର ଅନୁରୂପ ବାହୁମାନଙ୍କର ସମାନୁପାତିତା ଏବଂ ଅନୁରୂପ କୋଣମାନଙ୍କର ସର୍ବସମତା ପରସ୍ପର ନିର୍ଭରଶୀଳ ନୁହନ୍ତି । ସେ ଦୁଇଟି ସର୍ତ୍ତ ପରସ୍ପର ନିରପେକ୍ଷ ।

କିନ୍ତୁ ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜ ମଧ୍ୟରେ ଅନୁରୂପ ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମାନୁପାତିତା ଏବଂ ଅନୁରୂପ କୋଣମାନଙ୍କର ସର୍ବସମତା ସର୍ତ୍ତଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ନିର୍ଭରଶୀଳ । ଅର୍ଥାତ୍ ଗୋଟିଏ ସର୍ତ୍ତ ସିଦ୍ଧ ହେଲେ, ଅନ୍ୟ ସର୍ତ୍ତଟି ସ୍ୱତଃ ସିଦ୍ଧ ହୁଏ । ଉପପାଦ୍ୟ 4 ଓ 5 ରେ ଏହାର ପ୍ରମାଣ ଦିଆଯାଇଛି ।

1.6.2 ତ୍ରିଭୁଜ ସାଦୃଶ୍ୟ ସମ୍ପର୍କିତ ଉପପାଦ୍ୟ (Theorems on Triangle-Similarity) :

ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ତ୍ରିଭୁଜ ଦୁଇଟି ମଧ୍ୟରେ ସାଦୃଶ୍ୟ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ସର୍ତ୍ତକୁ ଯୁକ୍ତିମୂଳକ ଭାବେ ପ୍ରମାଣ କରିବା ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 4

ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନିକୋଣ, ଅନ୍ୟ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନୁରୂପ କୋଣ ସହ ସର୍ବସମ ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜ ଦୁଇଟି ସଦୃଶ ହୁଅନ୍ତି ।

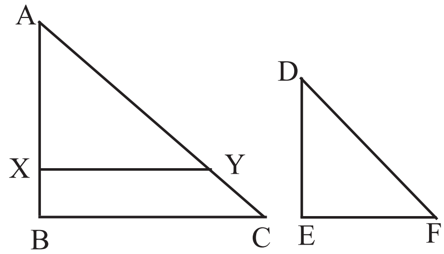
(If the angles of a triangle are congruent to the corresponding angles of another, then the triangles are similar.)

ଦତ୍ତ : ΔABC ଓ ΔDEF ମଧ୍ୟରେ $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ ଏବଂ $\angle C \cong \angle F$

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

ଅଙ୍କନ : ମନେକର $AB > DE$ । $\overline{AB}$ ଉପରେ X ବିନ୍ଦୁ ନିଆଯାଉ, ଯେପରି A-X-B ଏବଂ $AX = DE$

$\overline{XY}$ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ ଯେପରି $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ ଏବଂ A-Y-C



(ଚିତ୍ର 1.41)

ପ୍ରମାଣ : $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ (ଅଙ୍କନ)

$\Rightarrow \angle AXY \cong \angle B$ (ଅନୁରୂପ କୋଣ)

$\Rightarrow \angle AXY \cong \angle E$ ($\because \angle B \cong \angle E$ ଦତ୍ତ) .....(1)

ସେହିପରି ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇ ପାରେ ଯେ $\angle AYX \cong \angle F$ .... (2)

ΔAXY ଓ ΔDEF ମଧ୍ୟରେ, $\angle AXY \cong \angle E$ [(1) ଅନୁଯାୟୀ]

$\angle A \cong \angle D$ (ଦତ୍ତ) ଏବଂ $AX = DE$ (ଅଙ୍କନ) ।$\therefore$ $\Delta AXY \cong \Delta DEF$ (କୋ-କୋ-ବା ସର୍ବସମତା)

$\Rightarrow AY = DF$ (ଅନୁରୂପ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ) ...... (3)

ΔABC ରେ, $\overleftrightarrow{XY} \parallel \overline{BC}$ (ଅଙ୍କନ)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AX} = \dfrac{AC}{AY}$ (ଉପପାଦ୍ୟ - 1 ର ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$ [$\because$ $AX = DE$ (ଅଙ୍କନ) ଓ $AY = DF$ ((3)ରେ ପ୍ରାପ୍ତ] .... (4)

$\overline{BA}$ ଉପରେ Z ବିନ୍ଦୁ ନେଇ (ଯେପରି $BZ = ED$) ଏବଂ Z ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ $\overline{AC}$ ସହ ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା ଅଙ୍କନ କରି ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇ ପାରେ ଯେ $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF}$ ......(5)

(4) ଓ (5) $\Rightarrow \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$ ......(6)

ΔABC ଓ ΔDEF ମଧ୍ୟରେ $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$ (ଦତ୍ତ)

ଏବଂ ଅନୁରୂପ ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନୁପାତୀ [(6) ଅନୁଯାୟୀ]

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta DEF$ (ପ୍ରମାଣିତ)

(ଯଦି $DE > AB$ ହୁଏ, ତେବେ $\overline{DE}$ ଉପରେ X ବିନ୍ଦୁ ନେଇ ଅନୁରୂପ ଭାବେ ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇ ପାରିବ ।)

ଟୀକା : ସଂକ୍ଷେପରେ ସାଦୃଶ୍ୟର ଏହି ସର୍ତ୍ତକୁ **'କୋ-କୋ-କୋ ସାଦୃଶ୍ୟ'** (A-A-A Similarity) ବୋଲି କୁହାଯାଏ ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - (1) : ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇଟି କୋଣ ଯଥାକ୍ରମେ ଅନ୍ୟ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇଟି କୋଣ ସହ ସର୍ବସମ ହେଲେ, ତୃତୀୟ କୋଣ ଦ୍ୱୟ ସ୍ୱତଃସର୍ବସମ ହୁଅନ୍ତି ।($\because$ ପ୍ରତ୍ୟେକ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନିକୋଣର ପରିମାଣ ସମଷ୍ଟି 180^0 ।)

ଏଣୁ ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ତ୍ରିଭୁଜଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟ ସଦୃଶ ହୁଅନ୍ତି । ସାଦୃଶ୍ୟର ଏହି ସର୍ତ୍ତକୁ ସଂକ୍ଷେପରେ **'କୋ-କୋ ସାଦୃଶ୍ୟ'** କୁହାଯାଏ ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - (2) : ସଦୃଶକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟ (ଗୋଟିକର ତିନିକୋଣ ଯଥାକ୍ରମେ ଅନ୍ୟଟିର ତିନିକୋଣ ସହ ସର୍ବସମ) ର ଅନୁରୂପ ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନୁପାତୀ । ଉପପାଦ୍ୟ - 4 ର ପ୍ରମାଣରେ (6) ସୂଚିତ ଉକ୍ତି ଅନୁଯାୟୀ ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ।

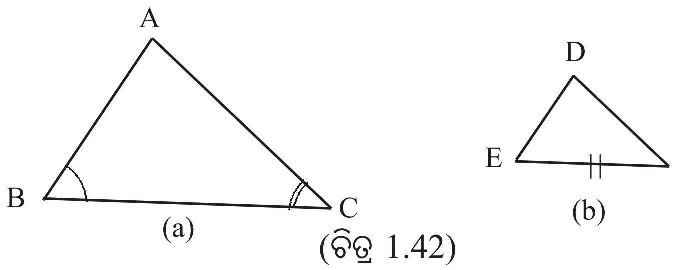
ଉପପାଦ୍ୟ - 5

ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନି ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ଅନ୍ୟ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନୁରୂପ ତିନିବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସହ ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜ ଦୁଇଟି ସଦୃଶ ହୁଅନ୍ତି ।

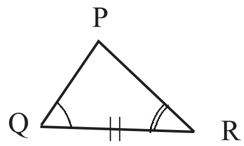
(If the lengths of three sides of a triangle are proportional to the lengths of the three corresponding sides of another triangle, then the two triangles are similar.)

ଦତ୍ତ : Δ ABC ଓ Δ DEF ମଧ୍ୟରେ, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : ΔABC ~ Δ DEF



(ଚିତ୍ର 1.42)



(ଚିତ୍ର 1.43)

ଅଙ୍କନ : Δ PQR ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ, ଯେପରି $\overline{QR} \cong \overline{EF}$, $\angle Q \cong \angle B$ ଓ $\angle R \cong \angle C$

ପ୍ରମାଣ : ΔABC ଓ ΔPQR ମଧ୍ୟରେ, $\angle B \cong \angle Q$ ଓ $\angle C \cong \angle R$ (ଅଙ୍କନ)

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta PQR$ [ଉପପାଦ୍ୟ - 4, ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ (1)] ....(1)

$\Rightarrow \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ}$ [ଉପପାଦ୍ୟ - 4, ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ (2)])

$\Rightarrow \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ}$ [QR = EF (ଅଙ୍କନ ଅନୁଯାୟୀ)] ....(2)

ମାତ୍ର $\frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE}$ (ଦତ୍ତ) ....(3)

(2) ଏବଂ (3) $\Rightarrow \frac{AC}{PR} = \frac{AC}{DF}$ ଏବଂ $\frac{AB}{PQ} = \frac{AB}{DE} \Rightarrow$ PR = DF ଓ PQ = DE .... (4)

$\because$ ΔPQR ଓ ΔDEF ମଧ୍ୟରେ QR = EF (ଅଙ୍କନ), PR = DF ଏବଂ PQ = DE [(4) ଅନୁଯାୟୀ]
$\therefore \Delta PQR \cong \Delta DEF$ (. ବା-ବା-ବା ସର୍ବସମତା) $\Rightarrow \Delta PQR \sim \Delta DEF$ .... (5)

(1) ଓ (5) $\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$ (ସାଦୃଶ୍ୟର ସଂକ୍ରମୀ ଧର୍ମ) (ପ୍ରମାଣିତ)

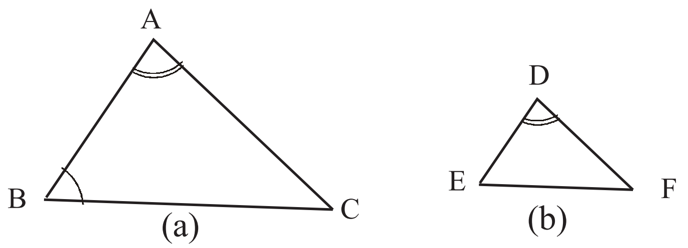
ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ଉପପାଦ୍ୟ - 5 ରେ ଥିବା ତ୍ରିଭୁଜ ମଧ୍ୟରେ ସାଦୃଶ୍ୟର ସର୍ତ୍ତକୁ ସଂକ୍ଷେପରେ **'ବା-ବା-ବା ସାଦୃଶ୍ୟ'** (S-S-S SImilarity) କୁହାଯାଏ ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 6

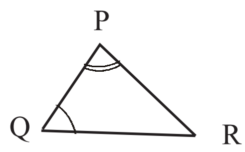
ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ଅନ୍ୟ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନୁରୂପ ଦୁଇ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସହ ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ ଏବଂ ବାହୁମାନଙ୍କ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜଦ୍ୱୟ ସଦୃଶ ହୁଅନ୍ତି ।

(If the lengths of two sides of a triangle are proportional to the lenghts of the corresponding two sides of another triangle and the angles included between those sides are congruent, then the trianlges are similar.)

ଦତ୍ତ : ΔABC ଓ ΔDEF ମଧ୍ୟରେ, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ ଓ $\angle A \cong \angle D$ ।



(ଚିତ୍ର 1.44)



(ଚିତ୍ର 1.45)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ ।

ଅଙ୍କନ : ΔPQR ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ, ଯେପରି $\overline{PQ} \cong \overline{DE}$, $\angle P \cong \angle A$, $\angle Q \cong \angle B$ ।

ପ୍ରମାଣ : ΔABC ଓ ΔPQR ମଧ୍ୟରେ, $\angle A \cong \angle P$ ଓ $\angle B \cong \angle Q$ (ଅଙ୍କନ)

$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta PQR$ (ଉପପାଦ୍ୟ - 4 ର ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ (1)) ..... (1)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{AC}{PR}$ (ଉପପାଦ୍ୟ - 4 ର ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ (2)) ..... (2)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{PR}$ ($\because$ DE = PQ ଅଙ୍କନ ଅନୁଯାୟୀ) ମାତ୍ର $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$ (ଦତ୍ତ) ..... (3)

(3) ରୁ $\Rightarrow \dfrac{AC}{PR} = \dfrac{AC}{DF} \Rightarrow PR = DF$ .... (4)

$\because$ ΔPQR ଓ ΔDEF ମଧ୍ୟରେ $\overline{PQ} \cong \overline{DE}$,
$\overline{PR} \cong \overline{DF}$ ((4) ଅନୁଯାୟୀ)
$\angle P \cong \angle D$ ($\angle A \cong \angle D$ (ଦତ୍ତ), $\angle P \cong \angle A$ (ଅଙ୍କନ))

$\therefore \Delta PQR \cong \Delta DEF$ (ବା-କୋ-ବା ସର୍ବସମତା)

$\Rightarrow \Delta PQR \sim \Delta DEF$ .... (5)

(1) ଓ (5) $\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$ (ସାଦୃଶ୍ୟର ସଂକ୍ରମୀ ଧର୍ମ) (ପ୍ରମାଣିତ)

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ଉପପାଦ୍ୟ - 6 ରେ ଥିବା ସାଦୃଶ୍ୟର ସର୍ତ୍ତକୁ ସଂକ୍ଷେପରେ **'ବା-କୋ-ବା ସାଦୃଶ୍ୟ' (S-A-S Similarity)** କୁହାଯାଏ ।

1.6.3 ସଦୃଶ ତ୍ରିଭୁଜ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଉପପାଦ୍ୟର ପ୍ରୟୋଗ :

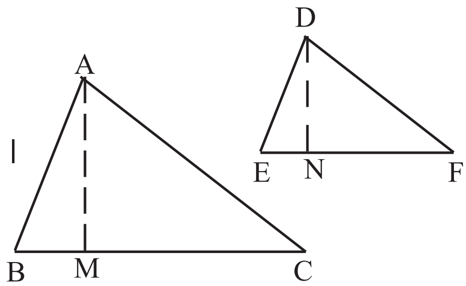
ପୂର୍ବବର୍ତ୍ତୀ ଉପପାଦ୍ୟମାନଙ୍କରେ ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜ କେଉଁ କେଉଁ ସର୍ତ୍ତରେ ସଦୃଶ ହୁଅନ୍ତି ଆମେ ଜାଣିଲେ ଏବଂ ତହିଁରୁ ଉଦ୍ଭବ ଏକ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ତଥ୍ୟ ଆମେ ଜାଣିଲେ । ଉକ୍ତ ତଥ୍ୟଟି ହେଲା, ଦୁଇଟି ସଦୃଶ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନୁରୂପ ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନୁପାତୀ ଅଟନ୍ତି । ଏହି ଜ୍ଞାନର ଉପଯୋଗ କରି ଆଉ କେତେକ ଗୁରୁତ୍ୱ ପୂର୍ଣ୍ଣ ତଥ୍ୟ ଆମେ ପରବର୍ତ୍ତୀ ଆଲୋଚନାରେ ପଢ଼ିବା ।

ପ୍ରମେୟ - 1.3 : ଦୁଇଟି ସଦୃଶ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଅନୁପାତ, ସେମାନଙ୍କର ଅନୁରୂପ ବାହୁମାନଙ୍କ ଦୈର୍ଘ୍ୟର ବର୍ଗାନୁପାତ ସହ ସମାନ ।

(**The areas of two similar triangles are proportional to the squares of the lenghts of their corresponding sides.**)

ଦତ୍ତ : $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ ଅର୍ଥାତ୍, $\angle A \cong \angle D, \angle B \cong \angle E, \angle C \cong \angle F$

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\dfrac{\Delta ABC\text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\Delta DEF\text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}} = \dfrac{AB^2}{DE^2} = \dfrac{BC^2}{EF^2} = \dfrac{CA^2}{FD^2}$



ଅଙ୍କନ : $\overline{AM} \perp \overline{BC}$ ଏବଂ $\overline{DN} \perp \overline{EF}$ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ ।

ପ୍ରମାଣ : ΔABM ଓ Δ DEN ମଧ୍ୟରେ

$\angle AMB \cong \angle DNE$ (ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମକୋଣ - ଅଙ୍କନ)

$\angle ABM \cong \angle DEN$ (ସଦୃଶ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନୁରୂପ କୋଣ)

(ଚିତ୍ର 1.46)

$\therefore \quad \Delta ABM \sim \Delta DEN$ (କୋ-କୋ ସାଦୃଶ୍ୟ) $\Rightarrow \dfrac{AM}{DN} = \dfrac{AB}{DE}$ (ସାଦୃଶ୍ୟର ସଂଜ୍ଞା) ....(1)

ପୁନଶ୍ଚ $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (ଦତ୍ତ) $\Rightarrow \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF}$ (ସାଦୃଶ୍ୟର ସଂଜ୍ଞା).........(2)

(1) ଓ (2) $\Rightarrow \dfrac{AM}{DN} = \dfrac{BC}{EF}$ ....(3)

$$\frac{\Delta ABC\text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\Delta DEF\text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}} = \frac{\frac{1}{2}BC \times AM}{\frac{1}{2}EF \times DN} = \frac{BC}{EF} \times \frac{AM}{DN} = \frac{BC}{EF} \times \frac{BC}{EF} \quad ((3)\text{ ଅନୁଯାୟୀ})$$

$$= \frac{BC^2}{EF^2} \qquad ....(4)$$

ମାତ୍ର $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (ଦତ୍ତ) $\Rightarrow \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$ ....(5)

(4) ଓ (5) $\Rightarrow \dfrac{\Delta ABC\text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\Delta DEF\text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}} = \dfrac{BC^2}{EF^2} = \dfrac{AB^2}{DE^2} = \dfrac{AC^2}{DF^2}$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1(c)

(କ - ବିଭାଗ)

1.ବନ୍ଧନୀ ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଉତ୍ତର ବାଛି ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର :

(i) ΔABC ଓ ΔDEF ମଧ୍ୟରେ, $m\angle A = m\angle D$, $m\angle B = m\angle E$, AB = 3 ସେ.ମି., BC = 5 ସେ.ମି. ଏବଂ DE = 7.5 ସେ.ମି. ହେଲେ, EF = ------ ସେ.ମି. (10, 10.5, 12, 12.5)

(ii) ΔABC ରେ AB = 5 ସେ.ମି., BC = 7 ସେ.ମି., CA = 8 ସେ.ମି.; ΔPQR ରେ PQ = 10 ସେ.ମି., QR = 14 ସେ.ମି. । PR = ----- ସେ.ମି. ହେଲେ, ΔABC ଓ ΔPQR ସଦୃଶକୋଣୀ ହେବେ ।

(12, 16, 20, 24)

(iii) ΔABC ଓ ΔPQR ମଧ୍ୟରେ $\angle B \cong \angle Q$ । ΔABC ର $AB = 8$ ସେ.ମି. ଏବଂ $BC = 12$ ସେ.ମି. । ΔPQR ର $PQ = 12$ ସେ.ମି. ଏବଂ $QR = 18$ ସେ.ମି. । ΔABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 48 ବର୍ଗ ସେ.ମି. ହେଲେ, ΔPQR ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ...ବର୍ଗ ସେ.ମି. ହେବ ।

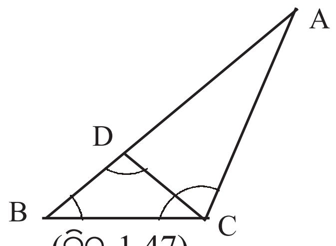
(84, 96, 104, 108)

(iv) ΔABC ରେ $\angle ABC$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overline{AC}$ କୁ P ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । $AB = 12$ ସେ.ମି. ଓ $BC= 9$ ସେ.ମି. ହେଲେ, $AP : AC$................ (4:3, 3:4, 7:4, 4:7)

(v) ଦୁଇଟି ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଅନୁପାତ 16 : 25 ହେଲେ, ସେହି ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟର ଅନୁରୂପ ଯୋଡ଼ାର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନୁପାତ ..... । (4:5, 2:5, 5:4, 5:2)

(vi) ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ, $m\angle B = 50^0$, $m\angle BDC = 100^0$ ଓ $\Delta DBC \sim \Delta CBA$ ହେଲେ, $m\angle ACD$......

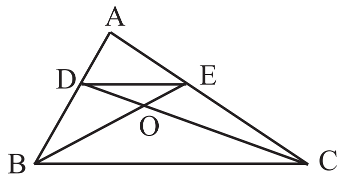
(60^0, 70^0, 80^0, 90^0)



(ଚିତ୍ର 1.47)

(vii) ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ, ΔABE ଓ ΔACD ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସମାନ ହେଲେ, $\Delta BOC \sim$ ....

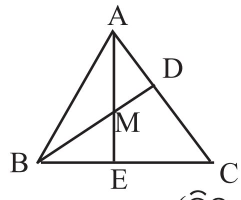
(ΔADE, ΔDOB, ΔEOD, ΔOEC)



(ଚିତ୍ର 1.48)

(viii) ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 1.49 ରେ ΔABC ର $\overline{AE}$ ଓ $\overline{BD}$ ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{BC}$ ଓ $\overline{AC}$ ପ୍ରତି ବିପରୀତ ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁରୁ ଲମ୍ବ, ତେବେ $\Delta BEM \sim \Delta$..........

[BEA, ABD, BDC, AEC]

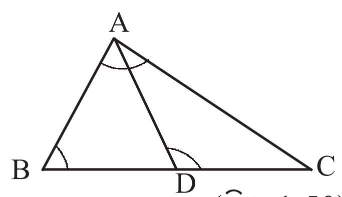


(ଚିତ୍ର 1.49)

(ix) ଚିତ୍ର 1.50 ରେ $\overline{BC}$ ଉପରିସ୍ଥ D ଏକ ବିନ୍ଦୁ ।

$\angle ADC \cong \angle BAC$ ହେଲେ, $CB \cdot CD$ = -----

(AC^2, AB^2, AD. AB, AD. AC)



(ଚିତ୍ର 1.50)

(x) ΔABC ରେ $\angle BAC$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overline{BC}$ କୁ M ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରେ ।

$AB : AC = 2:3$ ଏବଂ $BC = 15$ ସେ.ମି. ହେଲେ, BM = ...ସେ.ମି. (6, 9, 10, 12)

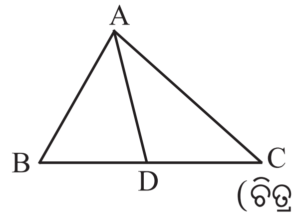
(ଖ - ବିଭାଗ)

2. (i) ΔABC ରେ $AB = 2.5$ ସେ.ମି., $BC = 2$ ସେ.ମି., $AC = 3.5$ ସେ.ମି.ଏବଂ ΔPQR ରେ $PQ = 5$ ସେ.ମି., $QR = 4$ ସେ.ମି., $PR = 7$ ସେ.ମି. । $m\angle A = x^0$ ଓ $m\angle Q = y^0$ ହେଲେ, $m\angle B$, $m\angle C$, $m\angle P$ ଓ $m\angle R$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ii) ΔABC ଓ ΔDEF ରେ $\angle B \cong \angle E$, $AB = 4$ ସେ.ମି., $BC = 6$ ସେ.ମି., $EF = 9$ ସେ.ମି. ଓ $DE = 6$ ସେ.ମି. । ΔABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 20 ବର୍ଗ ସେ.ମି. ହେଲେ, ΔDEF ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iii) ଦୁଇଟି ସଦୃଶ ତ୍ରିଭୁଜ ମଧ୍ୟରୁ ପ୍ରଥମଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଦ୍ୱିତୀୟଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର 9 ଗୁଣ ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜ ଦୁଇଟିର ଅନୁରୂପ ବାହୁ ଦ୍ୱୟର ଅନୁପାତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iv) ଚିତ୍ର 1.51 ରେ, $\angle BAC \cong \angle ADC$, $AC = 12$ ସେ.ମି. ଓ $BC = 15$ ସେ.ମି. । $\angle ADC$ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 32 ବ.ସେ.ମି. ହେଲେ, ΔABD ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।



(ଚିତ୍ର 1.51)

(v) ΔABC ର $AB = 5$ ସେ.ମି., $BC = 7$ ସେ.ମି. ଓ $CA = 9$ ସେ.ମି. । $\Delta PQR \sim \Delta ABC$ ଏବଂ ΔPQR ର ପରିସୀମା 63 ସେ.ମି. ହେଲେ, PQ, QR ଓ PR ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(vi) $\Delta ABC \sim \Delta PQR$; $AB = 5$ ସେ.ମି., $BC = 12$ ସେ.ମି., $AC = 13$ ସେ.ମି., ଓ $QR = 8$ ସେ.ମି. ହେଲେ, ΔPQR କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(vii) $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ । ΔABC ପରିସୀମା 60 ସେ.ମି. ଓ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 81 ବର୍ଗ ସେ.ମି.ଏବଂ ΔPQR ର ପରିସୀମା 80 ସେ.ମି. ହେଲେ, ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ କେତେ ?

3. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଦୁଇଟି ସଦୃଶ ତ୍ରିଭୁଜର

(a) ଅନୁରୂପ ଉଚ୍ଚତାମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ଉକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟର ଅନୁରୂପ ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସହ ସମାନୁପାତୀ ।

(b) ଅନୁରୂପ କୋଣ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ଉକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟର ଅନୁରୂପ ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସହ ସମାନୁପାତୀ ।

(c) ଅନୁରୂପ ମଧ୍ୟମା ମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟର ଅନୁରୂପ ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସହ ସମାନୁପାତୀ ।

4. ଦୁଇଟି ସଦୃଶ ତ୍ରିଭୁଜର ପରିସୀମା ସମାନ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ତ୍ରିଭୁଜ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ।

5. ଦୁଇଟି ସଦୃଶ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସମାନ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ତ୍ରିଭୁଜ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ।

6. ପ୍ରମାଣ କର : ଦୁଇଟି ସଦୃଶ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଅନୁପାତ, ଉକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟର

(a) ଅନୁରୂପ ଉଚ୍ଚତାମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ବର୍ଗାନୁପାତ ସହ ସମାନ ।

(b) ଅନୁରୂପ କୋଣ-ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ବର୍ଗାନୁପାତ ସହ ସମାନ ।

(c) ଅନୁରୂପ ମଧ୍ୟମାମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ବର୍ଗାନୁପାତ ସହ ସମାନ ।

(d) ପରିସୀମାର ବର୍ଗାନୁପାତ ସହ ସମାନ।

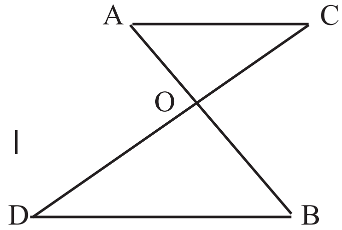
7. Δ ABC ର $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ବାହୁ ଉପରେ P ଓ Q ଏପରି ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ଯେପରିକି ΔBQP ଓ ΔCPQ ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\frac{PQ}{BC} = \frac{AP}{AB}$ ।

8. ଚିତ୍ର 1.52 ରେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ର ଛେଦ ବିନ୍ଦୁ O ।

(a) AO . OD = BO . OC ହେଲେ, ପ୍ରମାଣକର ଯେ $\Delta AOC \sim \Delta BOD$ ।

(b) CO . OD = AO . OB ହେଲେ, ପ୍ରମାଣକର ଯେ $\Delta AOC \sim \Delta DOB$

(c) ପୂର୍ବବର୍ତ୍ତୀ କେଉଁ କ୍ଷେତ୍ରରେ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{DB}$ ସମାନ୍ତର ହେବେ ?



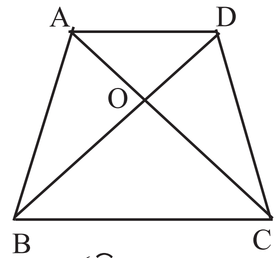
(ଚିତ୍ର 1.52)

9. ABCD ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍ ର $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ । କର୍ଣ୍ଣ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । AO = 3 ସେ.ମି. ଏବଂ OC = 5 ସେ.ମି. । ΔAOB ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 36 ବ.ସେ.ମି. ହେଲେ, ΔCOD ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

10. ଚିତ୍ର 1.53 ରେ ΔABC ଓ ΔDBC ଉଭୟ ଏକ ଭୂମି $\overline{BC}$ ଉପରିସ୍ଥ ।

$\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ ର ଛେଦ ବିନ୍ଦୁ O ହେଲେ,

ପ୍ରମାଣ କର : $\frac{\Delta ABD \text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\Delta BCD \text{ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}} = \frac{AO}{OC}$

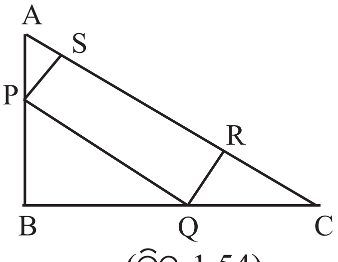


(ଚିତ୍ର 1.53)

(ଗ - ବିଭାଗ)

11. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁମାନଙ୍କର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ତ୍ରିଭୁଜଟି ଯେଉଁ ଚାରୋଟି ତ୍ରିଭୁଜରେ ପରିଣତ ହୁଏ, ସେମାନେ ସର୍ବସମ ଓ ପ୍ରତ୍ୟେକ ମୂଳ ତ୍ରିଭୁଜ ସହ ସଦୃଶ । ପୁନଶ୍ଚ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଉତ୍ପନ୍ନ ହୋଇଥିବା ପ୍ରତ୍ୟେକ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ, ମୂଳତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଏକ ଚତୁର୍ଥାଂଶ ।

12. ଚିତ୍ର 1.54 ରେ, ΔABC ର $\angle$ABC ଏକ ସମକୋଣ । PQRS ଏକ ଆୟତଚିତ୍ର ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,
$\Delta APS \sim \Delta QCR \sim \Delta PQB \sim \Delta ACB$

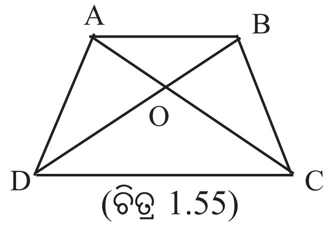


(ଚିତ୍ର 1.54)

13. ଚିତ୍ର 1.55 ରେ, $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ ।

$\Delta ADO \sim \Delta BCO$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ AD = BC
(ସୂଚନା : ପ୍ରଶ୍ନ 5 ରେ ପ୍ରମାଣିତ ତଥ୍ୟକୁ ବ୍ୟବହାର କର)

14. ABCD ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ରେ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ । $\angle ABD \cong \angle DCB$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣକର ଯେ BD^2=AD . BC ।



(ଚିତ୍ର 1.55)

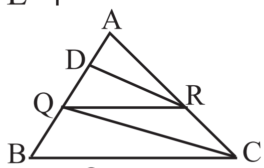
15. ΔABC ର $\overline{AB}$ ଓ $\overline{BC}$ ବାହୁ ଉପରେ ଯଥାକ୍ରମେ X ଓ Y ବିନ୍ଦୁ ଅବସ୍ଥିତ ଯେପରିକି $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, ΔABC ର ମଧ୍ୟମା $\overline{AD}$, $\overline{XY}$ କୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ ।

16. ΔABC ରେ $\overline{AD}$ ଏକ ମଧ୍ୟମା ଏବଂ $\overline{AD}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ E । $\overrightarrow{BE}$ ରଶ୍ମି $\overline{AC}$ କୁ X ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକଲେ, ପ୍ରମାଣକର ଯେ $BE = 3EX$ ।

17. ΔABC ରେ $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ଏବଂ $AD^2 = DC \,.\, BD$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣକର ଯେ (i) $\angle BAC$ ଏକ ସମକୋଣ (ii) ΔABD ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଓ ΔCAD ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ AB^2 ଓ AC^2 ସହ ସମାନୁପାତୀ ।

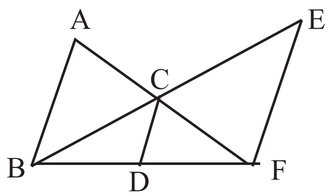
18. ΔABC ଓ ΔDEF ରେ $m\angle A = m\angle D, m\angle B = m\angle E$ । $\overline{BC}$ ଓ $\overline{EF}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଯଥାକ୍ରମେ X ଓ Y ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ (i) $\Delta AXC \sim \Delta DYF$ (ii) $\Delta AXB \sim \angle DYE$ ।

19. ଚିତ୍ର 1.56 ରେ ΔABC ର $\overline{AB}$ ଉପରିସ୍ଥ Q ଏକ ବିନ୍ଦୁ, $\overline{QR} \parallel \overline{BC}$ ଯେପରିକି A-R-C, $\overline{DR} \parallel \overline{QC}$ ଯେପରିକି A-D-B । ପ୍ରମାଣକର ଯେ $AQ^2 = AD \times AB$



(ଚିତ୍ର 1.56)

20. ଚିତ୍ର 1.57 ରେ $\overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF}$ ଏବଂ $\overline{AF}$ ଓ $\overline{BE}$ ପରସ୍ପରକୁ C ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $EF \times BD = DF \times AB$

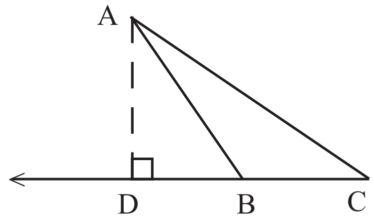


(ଚିତ୍ର 1.57)

21. ଦୁଇଟି ସଦୃଶ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ତଃବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଦ୍ୱୟର ଅନୁପାତ, ଉକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇଟି ଅନୁରୂପ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନୁପାତ ସହ ସମାନ, ପ୍ରମାଣ କର ।

22. A-P-B ଓ A-Q-B ହେଲେ ଏବଂ $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AQ}{QB}$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ P ଓ Q ଅଭିନ୍ନ ।

23. ଚିତ୍ର 1.58 ରେ ΔABC ର $\angle ABC$ ଏକ ସ୍ଥୁଳ କୋଣ । A ରୁ $\overrightarrow{BC}$ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ପାଦ ବିନ୍ଦୁ D । ଯଦି $AD^2 = BD \,.\, DC$ ହୁଏ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\angle BAD$ ଓ $\angle CAD$ ପରସ୍ପର ଅନୁରୂପକ ।



(ଚିତ୍ର 1.58)

24. ΔABC ର $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ଉପରେ ଯଥାକ୍ରମେ X ଓ Y ବିନ୍ଦୁ ଅବସ୍ଥିତ, ଯେପରିକି $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ । ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍ XBCY ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ, ΔAXY ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଆଠଗୁଣ ହେଲେ, $AX : BX$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

25. ABCD ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର । $\overrightarrow{AG}$ ରଶ୍ମି, $\overline{BD}, \overline{CD}$ ଓ $\overrightarrow{BC}$ କୁ ଯଥାକ୍ରମେ E, F ଓ G ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $AE : EG = AF : AG$ ।

1.7. ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ ସଦୃଶ ତ୍ରିଭୁଜମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା କେତେକ ଉପାଦେୟ ତଥ୍ୟ ନିମ୍ନ ପ୍ରମେୟ ଓ ଏହାର ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି ।

ପ୍ରମେୟ - 1.4 : ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ସମକୋଣର ଶୀର୍ଷରୁ କର୍ଣ୍ଣ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ ଦ୍ୱାରା ଯେଉଁ ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜ ଉତ୍ପନ୍ନ ହୁଏ, ସେ ଦ୍ୱୟ ପ୍ରତ୍ୟେକ ମୂଳ ତ୍ରିଭୁଜ ସହିତ ସଦୃଶ ଓ ପରସ୍ପର ସଦୃଶ ।

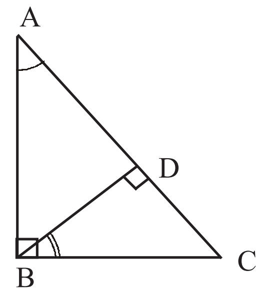
(When a perpendicular is drawn from the vertex of the right angle of a right-triangle to its hyptenuse, each of the two triangles formed is similar to the original triangle and those are mutually similar.)

ଦତ୍ତ : ΔABC ରେ $\angle ABC$ ସମକୋଣ । $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ । ଉତ୍ପନ୍ନ ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟ ΔABD ଏବଂ ΔBCD ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : (i) $\Delta ABD \sim \Delta ACB$

(ii) $\Delta BCD \sim \Delta ACB$

(iii) $\Delta ABD \sim \Delta BCD$



(ଚିତ୍ର 1.59)

ପ୍ରମାଣ : ΔABD ଓ ΔACB ମଧ୍ୟରେ,

$\because \begin{cases} \angle BAD \cong \angle BAC \\ \angle ADB \cong \angle ABC \end{cases}$ (ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମକୋଣ)

$\therefore \Delta ABD \sim \Delta ACB$ (କୋ-କୋ ସାଦୃଶ୍ୟ) .... (1) .((i)ପ୍ରମାଣିତ)

ΔBCD ଓ ΔACB ମଧ୍ୟରେ,

$\because \begin{cases} \angle BCD \cong \angle ACB \text{ ଏବଂ} \\ \angle BDC \cong \angle ABC \end{cases}$ (ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମକୋଣ)

$\therefore \Delta BCD \sim \Delta ACB$ (କୋ-କୋ ସାଦୃଶ୍ୟ) .... (2) ((ii) ପ୍ରମାଣିତ)

(1) ଓ (2) $\Rightarrow \Delta ABD \sim \Delta BCD$ (ସାଦୃଶ୍ୟର ସଂକ୍ରମୀ ଧର୍ମ) ((iii) ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : ΔABC ର $\angle ABC$ ସମକୋଣ ଏବଂ $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ ହେଲେ

(a) $AB^2 = AD \,.\, AC$, (b) $BC^2 = CD \,.\, AC$ ଏବଂ (c) $BD^2 = AD \,.\, DC$

(a) ର ପ୍ରମାଣ : (ଚିତ୍ର 1.59 ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ)

ଉପପାଦ୍ୟରେ ପ୍ରମାଣିତ : $\Delta ABD \sim \Delta ACB \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{BD}{BC}$

$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB}$ ନେଇ, ପାଇବା $AB^2 = AD \,.\, AC$

(b) ର ପ୍ରମାଣ : (ଚିତ୍ର 1.59 ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ)

ଉପପାଦ୍ୟରେ ପ୍ରମାଣିତ : $\Delta BCD \sim \Delta ACB \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{DC}{BC} = \frac{BD}{AB}$

$\frac{BC}{AC} = \frac{DC}{BC}$ ନେଇ, ପାଇବା $BC^2 = AC \,.\, DC$

(c) ର ପ୍ରମାଣ : (ଚିତ୍ର 1.59 ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ)

ଉପପାଦ୍ୟରେ ପ୍ରମାଣିତ : $\Delta ABD \sim \Delta BCD \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AD}{BD} = \frac{AB}{BC}$

$\frac{BD}{DC} = \frac{AD}{BD}$ ନେଇ, ପାଇବା $BD^2 = AD \, . \, DC$

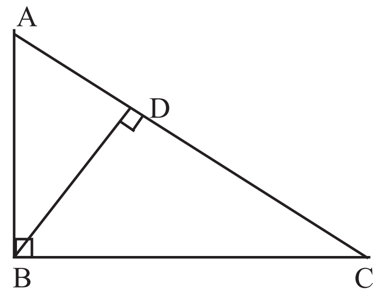
ସଦୃଶ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତେକ ଉଦାହରଣ :

ଉଦାହରଣ - 1 : ପ୍ରମେୟ - 1.4 ର ପ୍ରୟୋଗ କରି, ପିଥାଗୋରାସ୍ ଉପପାଦ୍ୟ ପ୍ରମାଣ କର ।

ଦତ୍ତ : ΔABC ରେ $\angle ABC$ ଏକ ସମକୋଣ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

ଅଙ୍କନ : $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ (କର୍ଣ୍ଣ) ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ ।



(ଚିତ୍ର 1.60)

ପ୍ରମାଣ : $\Delta ABD \sim \Delta ACB$ (ପ୍ରମେୟ - 1.4)

$\Rightarrow AB^2 = AD \times AC$ (ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ (a))........(1)

ପୁନଶ୍ଚ $\Delta BCD \sim \Delta BAC$ (ପ୍ରମେୟ - 1.4)

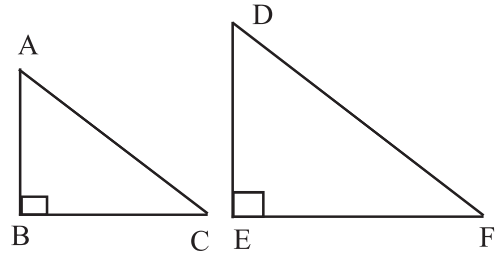
$\Rightarrow BC^2 = CD \, . \, CA$ (ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ (b))..........(2)

$\therefore AB^2 + BC^2 = AD \times AC + CD \, . \, CA$ ((1) ଓ (2) ଅନୁଯାୟୀ)

$= AC\,(AD + CD) = AC \times AC = AC^2$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ - 2 : ଦୁଇଟି ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ମଧ୍ୟରେ ଗୋଟିକର କର୍ଣ୍ଣ ଓ ଏକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଅନ୍ୟ ତ୍ରିଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣ ଓ ଏକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସହ ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ. ପ୍ରମାଣକର ଯେ ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟ ସଦୃଶ ଅଟନ୍ତି ।

ଦତ୍ତ : ΔABC ର $\angle B$ ଏବଂ ΔDEF ର କୋଣ $\angle E$ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମକୋଣ ଏବଂ $\frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE}$ ।



(ଚିତ୍ର 1.61)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

ପ୍ରମାଣ : $\frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE}$ (ଦତ୍ତ)

$\Rightarrow \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{DF^2}{DE^2} \Rightarrow \frac{AC^2}{AB^2} - 1 = \frac{DF^2}{DE^2} - 1$. (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରୁ 1 ବିୟୋଗ କରାଗଲା)

$\Rightarrow \frac{AC^2 - AB^2}{AB^2} = \frac{DF^2 - DE^2}{DE^2} \Rightarrow \frac{BC^2}{AB^2} = \frac{EF^2}{DE^2}$ (ପିଥାଗୋରାସ୍ ଉପପାଦ୍ୟ)

$\Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{EF}{DE} \Rightarrow \frac{BC}{EF} = \frac{AB}{DE}$. (ସମାନୁପାତର ଏକାନ୍ତର ପ୍ରକ୍ରିୟା) ....(1)

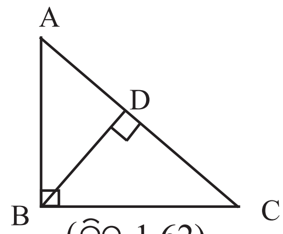
ΔABC ଓ ΔDEF ରେ

$\because \begin{cases} \angle B \cong \angle E \text{ (ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମକୋଣ)} \\ \frac{BC}{EF} = \frac{AB}{DE} \text{. ((1) ରେ ପ୍ରମାଣିତ)} \end{cases}$

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta DEF$ (ବା-କୋ-ବା ସାଦୃଶ୍ୟ) (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1 (d)

('କ' ବିଭାଗ)



(ଚିତ୍ର 1.62)

1. ବନ୍ଧନୀ ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଉତ୍ତର ବାଛି ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(i) ଚିତ୍ର 1.62 ରେ ଥିବା Δ ABC ରେ $m\angle ABC = 90^0$

ଏବଂ $\overline{BD} \perp \overline{AC}$,

$m\angle ABD$ = ... [$m\angle BAD$, $m\angle DBC$, $m\angle DCB$, $2m\angle BAD$]

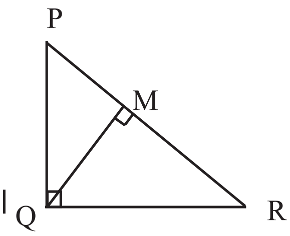
(ii) ଚିତ୍ର 1.62 ରେ ଥିବା ΔABC ରେ $\angle ABC$ ସମକୋଣ ଏବଂ $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ ହେଲେ,

(a) $AB^2 = AD \times$ ..... [BC, CD, AC, BD]

(b) $BC^2 = AC \times$ ..... [DC, AD, BD, AB]

(c) $BD^2 = DC \times$ ..... [AC, BC, AB, AD]

('ଖ' ବିଭାଗ)



(ଚିତ୍ର 1.63)

2. ଚିତ୍ର 1.63 ରେ ଥିବା ΔPQR ର $m\angle PQR = 90^0$ ଏବଂ $\overline{QM} \perp \overline{PR}$

(i) QM = 12 ସେ.ମି., ଏବଂ PM = 6 ସେ.ମି. ହେଲେ, PR ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ii) PQ = 6 ସେ.ମି. ଏବଂ PM = 3 ସେ.ମି. ହେଲେ, PR ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iii) QR = 12 ସେ.ମି. ଏବଂ MR = 9 ସେ.ମି. ହେଲେ, PM ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iv) PQ = 12 ସେ.ମି. ଓ RM = 7 ସେ.ମି. ହେଲେ, PM ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(v) PQ = 8 ସେ.ମି. ଓ QR = 15 ସେ.ମି. ହେଲେ, QM ଓ MR ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

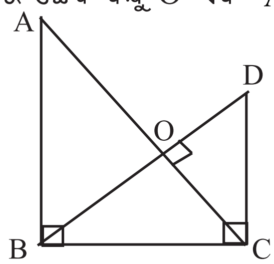
3. ଚିତ୍ର 1.64 ରେ $m\angle ABC = m\angle DCB = 90^0$ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ ର ଛେଦ ବିନ୍ଦୁ O ଏବଂ $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ ।

OC = 6 ସେ.ମି. ଏବଂ OD = 4 ସେ.ମି. ହେଲେ,

(i) BO ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର; (ii) OA ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର;

(iii) BC ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର; (iv) AB ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଏବଂ

(v) CD ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର;



(ଚିତ୍ର 1.64)

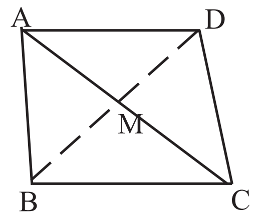
('ଗ' ବିଭାଗ)

4. ΔABC ରେ $\angle ABC$ ସମକୋଣ ଏବଂ $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ । $AD = p$ ଏକକ ଏବଂ $BD = q$ ଏକକ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର : (i) $BC = \dfrac{q(p+q)}{\sqrt{p^2+q^2}}$ (ii) $AB = \dfrac{p(p+q)}{\sqrt{p^2+q^2}}$

5. ΔABC ରେ, $m\angle ABC = 90^0$ ଏବଂ $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ ହେଲେ,
ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $AB^2 : BC^2 = AD : DC$ ।

6. ΔABC ରେ, $\angle ABC$ ସମକୋଣ ଏବଂ $BC^2 = AC \cdot BD$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\overline{BD}$ ହେଉଛି $\angle ABC$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ।

7. ଚିତ୍ର 1.65 ରେ ଥିବା ଚତୁର୍ଭୁଜ ABCD ରେ
$m\angle ABC = m\angle ADC = 90^0$ ଏବଂ $AB = AD$ ।
କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁ M ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ
$AM \times MC = DM^2$ (ପ୍ରମେୟ -1.4 ର ପ୍ରୟୋଗ କରି ପ୍ରମାଣ କର) ।



(ଚିତ୍ର 1.65)

8. ΔABC ରେ $m\angle ABC = 90^0$, $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ ଏବଂ $\angle ABC$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overline{AC}$ କୁ E ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $AE^2 : EC^2 = AD : DC$

9. ΔABC ରେ, $m\angle BAC = 90^0$ ଏବଂ $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ।

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ΔADC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\dfrac{AB \times AC^3}{2BC^2}$

10. ΔABC ର $\angle ABC$ ସମକୋଣ, $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ ଏବଂ $\angle BAC$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overline{BD}$ କୁ E ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରେ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $BE^2 : DE^2 = AC : AD$ ।

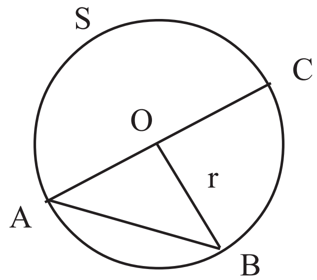
ଦ୍ୱିତୀୟ ଅଧ୍ୟାୟ

ବୃତ୍ତ
(CIRCLE)

2.1 ମୌଳିକ ଧାରଣା (Basic Concepts) :

ତୁମେ ପୂର୍ବରୁ କମ୍ପାସ୍ ସାହାଯ୍ୟରେ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରି ତା' ମଧ୍ୟରେ ତ୍ରିଭୁଜ ବର୍ଗଚିତ୍ର ଆଦି ଅନ୍ତର୍ଲିଖନ କରିବା ଶିଖିଛ । ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ଆମେ ବୃତ୍ତ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଅଧିକ ତଥ୍ୟ ଆଲୋଚନା କରିବା । ସରଳରେଖା, ତ୍ରିଭୁଜ, ଆୟତଚିତ୍ର ଓ ବର୍ଗଚିତ୍ର ପରି, ବୃତ୍ତ ଏକ ସମତଳରେ ଥିବା କେତେଗୁଡ଼ିଏ ବିନ୍ଦୁର ସେଟ୍ ବା ସମାହାର ଅଟେ । ବର୍ତ୍ତମାନ କେଉଁ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସମାହାରରେ ବୃତ୍ତ ଗଠିତ, ତାହା ଆମେ ବୃତ୍ତର ସଂଜ୍ଞାରୁ ଜାଣିବା ।

ସଂଜ୍ଞା : ଗୋଟିଏ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ କୌଣସି ଏକ ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦୂରତାରେ ଉକ୍ତ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁର ସେଟ୍‌କୁ ବୃତ୍ତ (Circle) କୁହାଯାଏ ।

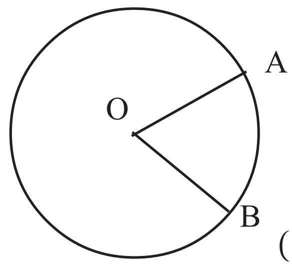


(ଚିତ୍ର 2.1)

ଚିତ୍ର 2.1 ରେ ବହି ପୃଷ୍ଠାର ସମତଳରେ O ଏକ ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ । O ବିନ୍ଦୁ ଠାରୁ r ଏକକ ଦୂରତାରେ ପୂର୍ବୋକ୍ତ ସମତଳରେ ଥିବା ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁର ସେଟ୍ S କୁ ଆମେ ଏକ ବୃତ୍ତ କହିବା । S ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁ O ଠାରୁ r ଦୂରତାରେ ଅଛି । ଅର୍ଥାତ୍ OA = OB = OC = r । ଏଠାରେ O କୁ ବୃତ୍ତ S ର **କେନ୍ଦ୍ର (Centre)** ଏବଂ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦୂରତା r କୁ ବୃତ୍ତର **ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ (radius)** କୁହାଯାଏ ।

ସୁତରାଂ କେବଳ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଓ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଦତ୍ତ ଥିଲେ ବୃତ୍ତଟି ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ରୂପେ ନିର୍ଣ୍ଣିତ ହୋଇଥାଏ । ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ କହିଲେ ଆମେ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଓ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁର ଦୂରତାକୁ ବୁଝିଥାଉ ଏବଂ ବୃତ୍ତର ଏକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ କହିଲେ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଏବଂ କେନ୍ଦ୍ର O ର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ବୁଝିଥାଉ । ଅର୍ଥାତ **ବୃତ୍ତର 'ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ' ଏକ ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ 'ଏକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ' ହେଉଛି ଏକ ରେଖାଖଣ୍ଡ ।**

ଯଥା : ଚିତ୍ର 2.2ରେ ଥିବା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ହେଉଛି 2 ସେ.ମି. (ଯଦି OA = 2 ସେ.ମି.) ଏବଂ $\overline{OA}$ ଓ $\overline{OB}$ ହେଉଛନ୍ତି ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ।



(ଚିତ୍ର 2.2)

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ :

1. ଆମର ସମସ୍ତ ଆଲୋଚନାରେ ବୃତ୍ତ ଏବଂ ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେବେ ।

2. ପ୍ରମେୟ 2.2ରେ ଆମେ ପ୍ରମାଣ କରିବା ଯେ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ନ ଥିବା ଯେକୌଣସି ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରିବ । ତେଣୁ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଯେକୌଣସି ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱାରା ବୃତ୍ତଟି ସୂଚିତ ହୁଏ । ଉପରୋକ୍ତ ବୃତ୍ତ S କୁ (ଚିତ୍ର 2.1) ଆମେ ABC ବୃତ୍ତ ନାମରେ ପ୍ରକାଶ କରିପାରିବା ।

3. ABC ବୃତ୍ତକୁ ସାଙ୍କେତିକ ଚିହ୍ନ 'ABC ⊙' ଦ୍ୱାରା ମଧ୍ୟ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ ।

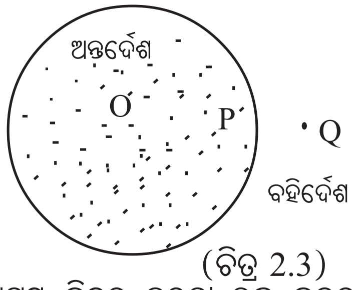
ଜ୍ୟା (Chord) : ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ବୃତ୍ତର ଏକ ଜ୍ୟା କୁହାଯାଏ ।

ବ୍ୟାସ (Diameter) : ଯେଉଁ ଜ୍ୟାରେ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଅବସ୍ଥିତ ସେହି ଜ୍ୟାକୁ ବୃତ୍ତର ଏକ ବ୍ୟାସ କୁହାଯାଏ ।

ଚିତ୍ର 2.1ରେ $\overline{AB}$ ଏକ ଜ୍ୟା ଏବଂ $\overline{AC}$ ଏକ ବ୍ୟାସ । ଯେହେତୁ ବୃତ୍ତର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁ କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ, AO = OC । ଯଦି ABC ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r = 2 ସେ.ମି. ହୁଏ ତେବେ AC = AO + OC = 4 ସେ.ମି. ହେବ । ଅର୍ଥାତ୍ **ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r ଏକକ ହେଲେ ବ୍ୟାସ 2r ଏକକ ହେବ ।** ଫଳରେ ବୃତ୍ତର 'ଏକ ବ୍ୟାସ' ହେଉଛି ଏକ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଯାହାର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଏବଂ ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ହେଉଛି କେନ୍ଦ୍ର । ମାତ୍ର 'ବ୍ୟାସ' ହେଉଛି ଏକ ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା । ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବ୍ୟାସର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ । ଚିତ୍ର 2.1ରେ A ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟ ଦେଇ ଅନେକ ଗୁଡ଼ିଏ ଜ୍ୟା ଅଙ୍କନ କରି ଲକ୍ଷ୍ୟ କରିପାରିବ ଯେ $\overline{AC}$ ବ୍ୟାସର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର ଯେକୌଣସି ଜ୍ୟାର ଦୈର୍ଘ୍ୟଠାରୁ ବୃହତ୍ତର । ଅର୍ଥାତ୍ **ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଏକ ବ୍ୟାସ ହେଉଛି ଏହାର ଦୀର୍ଘତମ ଜ୍ୟା ।**

ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ଓ ବହିର୍ଦେଶ :

ଏକ ବୃତ୍ତର ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ ଦୂରତା ପରିପ୍ରେକ୍ଷୀରେ ସମତଳଟି ତିନୋଟି ଅଂଶରେ ବିଭକ୍ତ ହୁଏ । ଯଥା :



(ଚିତ୍ର 2.3)

(i) **ଅନ୍ତର୍ଦେଶ** : ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ ବୃତ୍ତର ସମତଳ ଉପରିସ୍ଥ ଯେଉଁ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁର ଦୂରତା ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧଠାରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରତର ସେଗୁଡ଼ିକୁ ବୃତ୍ତର **ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ (Interior Points)** କୁହାଯାଏ । ଅର୍ଥାତ୍ କେନ୍ଦ୍ର ବିନ୍ଦୁ O ଥିବା ଏକ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r ଏକକ ହେଲେ ଉକ୍ତ ସମତଳସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଲାଗି ଯଦି OP < r ହୁଏ ତେବେ P ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ହେବ । ଚିତ୍ର 2.3 ରେ P ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ । ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସମାହାରକୁ ବୃତ୍ତର **ଅନ୍ତର୍ଦେଶ (Interior)** କୁହାଯାଏ ।

(ii) **ବହିର୍ଦେଶ –** ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ ବୃତ୍ତର ସମତଳ ଉପରିସ୍ଥ ଯେଉଁ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ଦୂରତା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ସେଗୁଡ଼ିକୁ ବୃତ୍ତର **ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ (Exterior points)** କୁହାଯାଏ । ଅର୍ଥାତ୍ ଏକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ

ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r ଏକକ ହେଲେ ଯଦି ବୃତ୍ତର ସମତଳସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ Q ଲାଗି OQ > r ହୁଏ ତେବେ Q ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ । ଚିତ୍ର 2.3ରେ Q ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ । ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସମାହାରକୁ ବୃତ୍ତର **ବହିର୍ଦ୍ଦେଶ (exterior)** କୁହାଯାଏ । ଏଠାରେ ମନେରଖିବା ଉଚିତ ହେବ ଯେ, ବୃତ୍ତ ଓ ଏହାର ଅନ୍ତର୍ଦ୍ଦେଶ ବ୍ୟତୀତ ସମତଳର ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କୁ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ କୁହାଯାଏ ।

(iii) **ବୃତ୍ତ** ଉପରିସ୍ଥ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ।

ଚିତ୍ର 2.3ରେ ଚିତ୍ରିତ ଅଂଶଟି ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦ୍ଦେଶ । $\overline{AB}$ ବୃତ୍ତର ଯେକୌଣସି ଜ୍ୟା ହେଲେ A ଓ B ପ୍ରାନ୍ତ ଦ୍ୱୟ ବ୍ୟତୀତ ଜ୍ୟାର ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦ୍ଦେଶରେ ଅବସ୍ଥିତ । ଏହାର ପ୍ରମାଣ ପ୍ରମେୟ - 2.1, ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 2ର ପରବର୍ତ୍ତୀ ଅନୁଚ୍ଛେଦ ଦେଖ ।

ମନ୍ତବ୍ୟ - ଏକ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦ୍ଦେଶ ଏକ **ଉତ୍ତଳ** ସେଟ୍ ଅଟେ ।

ସଂଜ୍ଞା : 1. **ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ :** ଏକାଧିକ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ସମାନ ହେଲେ ସେମାନଙ୍କୁ **ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ (Congruent Circles)** କୁହାଯାଏ ।

2. **ସର୍ବସମ ଜ୍ୟା :** ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ବା ଏକାଧିକ ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତରେ ଯେଉଁ ଜ୍ୟାମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ସେମାନଙ୍କୁ **ସର୍ବସମ ଜ୍ୟା (Congruent Chords)** କୁହାଯାଏ ।

ପରବର୍ତ୍ତୀ ସମୟରେ ଆମେ ଏକାଧିକ ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତରେ ଥିବା ସର୍ବସମ ଜ୍ୟା ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

2.2 ଜ୍ୟା ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତେକ ଉପପାଦ୍ୟ :

ଉପପାଦ୍ୟ - 7

ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରରୁ ଏହାର ବ୍ୟାସ ଭିନ୍ନ ଏକ ଜ୍ୟା ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ ଉକ୍ତ ଜ୍ୟାକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ ।

[The perpendicular drawn from the centre of a circle to a chord, other than a diameter, bisects the chord.]

ଦତ୍ତ : S ବୃତ୍ତରେ $\overline{AB}$ ବ୍ୟାସ ଭିନ୍ନ ଏକ ଜ୍ୟା, ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଠାରୁ $\overline{AB}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ $\overline{OD}$ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : AD = DB

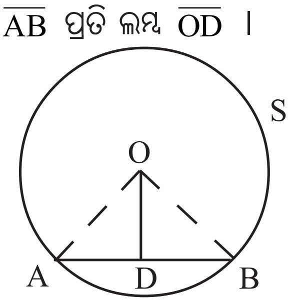
ଅଙ୍କନ : $\overline{OA}$ ଓ $\overline{OB}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : Δ OAD ଏବଂ Δ OBD ମଧ୍ୟରେ

OA = OB (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ), $\overline{OD}$ ସାଧାରଣ ବାହୁ ।
$\angle ODA \cong \angle ODB$ (ପ୍ରତ୍ୟେକ ଏକ ସମକୋଣ)

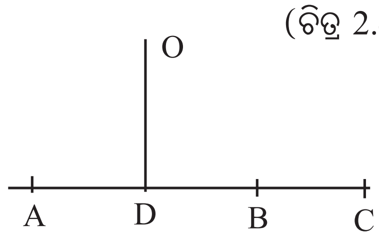
$\therefore \Delta OAD \cong \Delta OBD$ (ସମକୋଣ-କର୍ଣ୍ଣ - ବାହୁ)

$\therefore AD = DB$ (ପ୍ରମାଣିତ)



(ଚିତ୍ର 2.4)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ବୃତ୍ତକୁ ଦୁଇଟିରୁ ଅଧିକ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ ନାହିଁ ।



(ଚିତ୍ର 2.5)

ପ୍ରମାଣ : ଯଦି ସମ୍ଭବ ହୁଏ ତେବେ ସରଳରେଖାଟି ବୃତ୍ତକୁ କ୍ରମାନ୍ୱୟରେ ତିନୋଟି ଭିନ୍ନ ବିନ୍ଦୁ A,B ଓ C ରେ ଛେଦ କରୁ । O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ $\overline{OD}$, $\overline{AB}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହେଉ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ଏବଂ ଉପପାଦ୍ୟ - 7ରୁ ଏହା ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ AD = DB ଏବଂ AD = DC । ସୁତରାଂ DB = DC । ମାତ୍ର D-B-C ହେତୁ ଏହା ଅସମ୍ଭବ । ସୁତରାଂ ସରଳରେଖାଟି ବୃତ୍ତକୁ ଦୁଇଟିରୁ ଅଧିକ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ ନାହିଁ ।

(ସୂଚନା : ଏଠାରେ ଆମେ ପ୍ରାମାଣ୍ୟର ବିପରୀତ ଉକ୍ତିକୁ ଆଧାର କରି ତର୍କ ଦ୍ୱାରା ଏକ ଅସମ୍ଭବ ପରିସ୍ଥିତିରେ ପହଞ୍ଚିଲେ; ଯାହା ପ୍ରାମାଣ୍ୟର ସତ୍ୟତାକୁ ପ୍ରମାଣ କରୁଛି । ଏହି ପ୍ରକାର ପ୍ରମାଣକୁ ଗଣିତରେ **ଅସମ୍ଭବାୟନ ପ୍ରଣାଳୀ (Method of contradiction)** କୁହାଯାଏ ।

ପ୍ରମେୟ 2.1 (ଉପପାଦ୍ୟ -7 ର ବିପରୀତ କଥନ ଓ ପ୍ରମାଣ) :

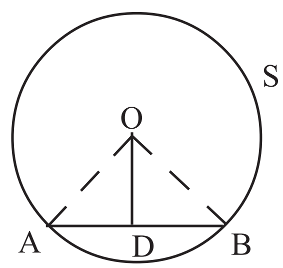
କୌଣସି ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସ ଭିନ୍ନ ଏକ ଜ୍ୟାର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଓ କେନ୍ଦ୍ରକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖା ଉକ୍ତ ଜ୍ୟା ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଅଟେ ।

[The line joining the centre of a circle to the midpoint of a chord, other than a diameter, is perpendicular to the chord.]

ଦତ୍ତ : S ବୃତ୍ତରେ $\overline{AB}$ ବ୍ୟାସ ଭିନ୍ନ ଏକ ଜ୍ୟା, O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ D, $\overline{AB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\overleftrightarrow{OD} \perp \overline{AB}$

ଅଙ୍କନ : $\overline{OA}$ ଓ $\overline{OB}$ ଅଙ୍କନ କର ।



(ଚିତ୍ର 2.6)

ପ୍ରମାଣ : Δ OAD ଏବଂ Δ OBD ମଧ୍ୟରେ

$\because$ { OA = OB (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)
AD = DB ($\because$ D, $\overline{AB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ), $\overline{OD}$ ସାଧାରଣ ବାହୁ ।

$\therefore \Delta ADO \cong \Delta BDO$ (ବାହୁ- ବାହୁ - ବାହୁ)

$\Rightarrow m\angle ADO = m\angle BDO$

କିନ୍ତୁ $m\angle ADO + m\angle BDO = 180^0$ (ସନ୍ନିହିତ ପରିପୂରକ କୋଣ)

$\Rightarrow m\angle ADO = m\angle BDO = 90^0$ ଅର୍ଥାତ୍ $\overleftrightarrow{OD} \perp \overline{AB}$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 :

ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଏହାର ଯେକୌଣସି ଜ୍ୟାର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ । କାରଣ ଯେ କୌଣସି ଜ୍ୟାର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁଠାରେ କେବଳ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ଲମ୍ବ ଅଙ୍କିତ ହୋଇପାରିବ ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 2 :

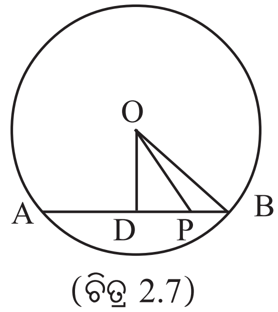
(i) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଅସମାନ୍ତର ଜ୍ୟାର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ ଦ୍ୱୟ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରରେ ମିଳିତ ହୁଅନ୍ତି । କାରଣ ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 ଅନୁଯାୟୀ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

(ii) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ଜ୍ୟାର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବଦ୍ୱୟ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଦେଇ ଯାଇଥିବା ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ (କାହିଁକି ?) ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ତୁମେ ପ୍ରମାଣ କରିପାରିବ ଯେ $\overline{AB}$ ଏକ ବୃତ୍ତର ଜ୍ୟା ହେଲେ A ଓ B ଭିନ୍ନ ଜ୍ୟାଟିର ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ । ଚିତ୍ର 2.7ରେ P, $\overline{AB}$ ଜ୍ୟା ଉପରେ ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଭିନ୍ନ ଯେକୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ । $\overline{OD} \perp \overline{AB}$ ହେଲେ $OP^2 = OD^2 + DP^2 \Rightarrow OP^2 < OD^2 + DB^2 \Rightarrow OP^2 < OB^2$ ।

ସୁତରାଂ OP < ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ । ଅର୍ଥାତ୍ P ବୃତ୍ତର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ । (ଚିତ୍ରରେ D-P-B ନିଆଯାଇଛି।

ଯଦି P-D-B ହୁଏ ତେବେ ମଧ୍ୟ ପ୍ରମାଣ ଅନୁରୂପ ହେବ ।)



(ଚିତ୍ର 2.7)

ଯଦି A ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଓ P ବୃତ୍ତର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ହୁଏ ତେବେ $\overrightarrow{AP}$ ବୃତ୍ତକୁ ଅନ୍ୟ ଏକ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ । ଏହା ସ୍ୱତଃସିଦ୍ଧ ମନେ ହେଉଥିଲେ ହେଁ ଏହାର ଯୁକ୍ତିମୂଳକ ପ୍ରମାଣ କିପରି କରାଯାଇପାରେ ଦେଖିବା । ଚିତ୍ର 2.8ରେ ଥିବା ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r ।

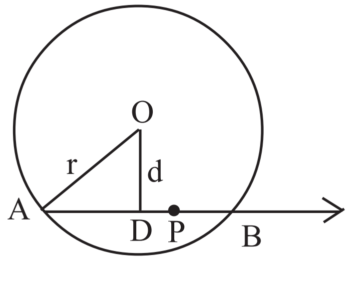
P ବୃତ୍ତର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ, $\overline{OD} \perp \overrightarrow{AP}$ ଏବଂ OD = d ହେଉ ।

ତେଣୁ $d \le OP < r$ ହେବ । ସୁତରାଂ $\sqrt{r^2 - d^2}$ ଏକ ଧନାତ୍ମକ

ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା । $\therefore$ $\overrightarrow{AP}$ ଉପରେ ଏପରି ଏକ ବିନ୍ଦୁ B ଅଛି ଯେପରିକି

D-P-B (କିମ୍ବା P-D-B) ଏବଂ $DB = \sqrt{r^2 - d^2}$ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ $OB = \sqrt{OD^2 + DB^2} = r \Rightarrow$ B ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ।

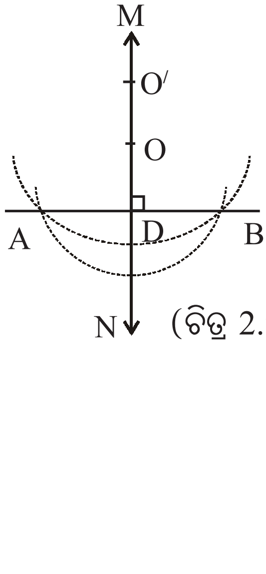


(ଚିତ୍ର 2.8)

ଆମେ ଜାଣୁ, ଗୋଟିଏ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସରଳରେଖା ଅଙ୍କନ କରିବା ନିମନ୍ତେ ଆମେ ଉକ୍ତ ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ଅତି କମ୍‌ରେ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁର ଅବସ୍ଥିତି ଜାଣିବା ଆବଶ୍ୟକ । ଅନ୍ୟ ପକ୍ଷରେ ଦୁଇଟି ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଆମେ କେବଳ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ସରଳରେଖା ଅଙ୍କନ କରିପାରିବା । ବର୍ତ୍ତମାନ ପ୍ରଶ୍ନ ଉଠେ ଯେ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରିବା ନିମନ୍ତେ ଅତି କମ୍‌ରେ କେତୋଟି ବିନ୍ଦୁର ଆବଶ୍ୟକ ଜାଣିବା ।

ଚିତ୍ର 2.9 ରେ A ଓ B ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ । D, $\overline{AB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ

ଏବଂ $\overleftrightarrow{MN}$ ରେଖା D ବିନ୍ଦୁରେ $\overline{AB}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହୁଅନ୍ତୁ ।



(ଚିତ୍ର 2.9)

ପ୍ରମେୟ 2.1 ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 ଅନୁସାରେ $\overleftrightarrow{MN}$ ଉପରିସ୍ଥ ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁ O, A ଏବଂ B ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଇଥବା (ଅର୍ଥାତ୍ $\overline{AB}$ ଜ୍ୟା ଥିବା) କୌଣସି ଏକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ହେବ । ଏହା ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ $\overline{AB}$ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର ଏକ ଜ୍ୟା ହେବ ଏବଂ OA = OB = ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ । ଅର୍ଥାତ୍ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ A ଓ B ମଧ୍ୟ ଦେଇ ଅସଂଖ୍ୟ ବୃତ୍ତ ରହିଛି । ପରବର୍ତ୍ତୀ ପ୍ରମେୟରେ ଆମେ ପ୍ରମାଣ କରିବା ଯେ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ନିମନ୍ତେ ଅତି କମ୍‌ରେ ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁର ଅବସ୍ଥିତି ଜାଣିବା ଆବଶ୍ୟକ । ନିମ୍ନ ଆଲୋଚନାରୁ ଏହା ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ହେବ ।

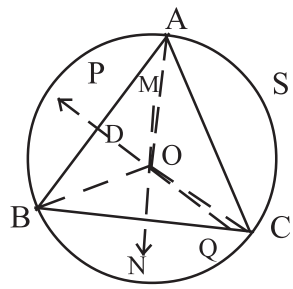
ପ୍ରମେୟ 2.2 : ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ ନ ଥିବା ଯେକୌଣସି ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟ ଦେଇ ଗୋଟିଏ ଏବଂ କେବଳ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇ ପାରିବ ।

[There is one and only one circle that passes through three non-collinear points.]

ଦତ୍ତ : A, B ଓ C ଏକ ସରଳରେଖାରେ ନ ଥିବା ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : A, B ଓ C ବିନ୍ଦୁ ତ୍ରୟ ଦେଇ ଗୋଟିଏ ଏବଂ କେବଳ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ ସମ୍ଭବ ।

ଅଙ୍କନ : $\overline{AB}$ ଓ $\overline{BC}$ ଅଙ୍କନ କର । $\overleftrightarrow{PQ}$ ଏବଂ $\overleftrightarrow{MN}$ ରେଖାଦ୍ୱୟ ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{BC}$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ ହୁଅନ୍ତୁ । A, B ଓ C ଏକ ସରଳରେଖାରେ ନ ଥିବାରୁ $\overleftrightarrow{PQ}$ ଏବଂ $\overleftrightarrow{MN}$ ରେଖାଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରିବେ ଏବଂ ସେହି ଛେଦବିନ୍ଦୁ O ହେଉ । $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ ଏବଂ $\overline{OC}$ ଅଙ୍କନ କର ।



(ଚିତ୍ର 2.10)

ପ୍ରମାଣ : ଯେହେତୁ O ବିନ୍ଦୁ $\overline{AB}$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ତେଣୁ OA = OB । ସେହିପରି OB = OC । ସୁତରାଂ OA = OB = OC ।

ବର୍ତ୍ତମାନ O ବିନ୍ଦୁକୁ କେନ୍ଦ୍ର କରି OA ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଏକ ବୃତ୍ତ S ଅଙ୍କନ କଲେ B ଓ C ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ହେବେ । ଅର୍ଥାତ୍ A, B ଓ C ବିନ୍ଦୁ ତ୍ରୟ S ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ହେବେ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ପ୍ରମାଣ କରିବା ଯେ ଏହିପରି ମାତ୍ର ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରିବ । ମନେକର ଆଉ ଏକ ବୃତ୍ତ S' ରହିଅଛି ଯାହା ଉପରେ A, B ଓ C ଅବସ୍ଥିତ । O' ଏହି ବୃତ୍ତ S' ର କେନ୍ଦ୍ର ହେଉ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ $O'A = O'B \Rightarrow O'$, $\overline{AB}$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ $\overleftrightarrow{PQ}$ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ । ସେହିପରି $O'B = O'C$ $\Rightarrow O'$, $\overline{BC}$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ $\overleftrightarrow{MN}$ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ । ଅର୍ଥାତ୍ O ଏବଂ O' $\overleftrightarrow{PQ}$ ଏବଂ $\overleftrightarrow{MN}$ ରେଖାଦ୍ୱୟର ଦୁଇଟି ଛେଦବିନ୍ଦୁ ଯାହାକି ଅସମ୍ଭବ, କାରଣ ଦୁଇଟି ସରଳରେଖା ମାତ୍ର ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରେ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରନ୍ତି । ସୁତରାଂ O ଏବଂ O' ଅଭିନ୍ନ ଅଟନ୍ତି । ଅତଏବ $OA = O'A$ ତେଣୁ S ଓ S' ଅଭିନ୍ନ ଅଟନ୍ତି । (ପ୍ରମାଣିତ)

ସଂଜ୍ଞା : ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ବୃତ୍ତକୁ ଉକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜର ପରିବୃତ୍ତ (Circum-Circle) ଓ ଏହାର କେନ୍ଦ୍ରବିନ୍ଦୁକୁ ଉକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜର ପରିକେନ୍ଦ୍ର (Circum-Centre) କୁହାଯାଏ ।

ଚାରି ବା ତତୋଧିକ ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟ ଦେଇ ସର୍ବଦା ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ ସମ୍ଭବ ହୋଇ ନ ପାରେ । ଅନ୍ୟ ପକ୍ଷରେ ଯଦି କୌଣସି ଚତୁର୍ଭୁଜ ବା ବହୁଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁମାନେ ଏକ ବୃତ୍ତ ଉପରେ ରହନ୍ତି ତେବେ ସେହି ଚତୁର୍ଭୁଜ ବା ବହୁଭୁଜକୁ **ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ (inscribed in a circle)** ଚତୁର୍ଭୁଜ ବା ବହୁଭୁଜ କୁହାଯାଏ । ପ୍ରମେୟ - 2.2 ଅନୁଯାୟୀ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜ ସର୍ବଦା ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ହୁଏ ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ ପରସ୍ପରକୁ ଦୁଇଟିରୁ ଅଧିକ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି ନାହିଁ ।

ଯଦି ଏକ ତୃତୀୟ ଛେଦବିନ୍ଦୁ ଥାଏ ତେବେ ଛେଦ ବିନ୍ଦୁ ତ୍ରୟ ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ ଉପରେ ରହିବେ । ପ୍ରମେୟ - 2.2 ଅନୁଯାୟୀ ଏହା ଅସମ୍ଭବ ।

ପ୍ରଶ୍ନ : ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଥିବା ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ ସମ୍ଭବ କି ? (ସୂଚନା : ଯଦି ସମ୍ଭବ ତେବେ ସେପରି କ୍ଷେତ୍ରରେ ସରଳରେଖାଟି ସମ୍ଭାବ୍ୟ ବୃତ୍ତକୁ ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ । ଉପପାଦ୍ୟ - 7ର ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତକୁ ଏହା ବିରୋଧ କରେ ।)

ଉପପାଦ୍ୟ - 8

ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ସମାନ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ଜ୍ୟାମାନେ କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ ।

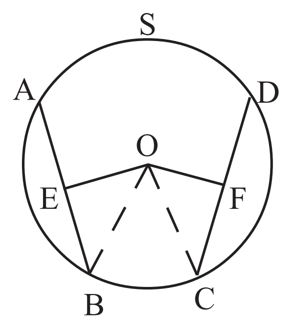
[Chords of equal length in a circle are equidistant from the centre.]

ଦତ୍ତ : S ବୃତ୍ତରେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ଏବଂ AB = CD । O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର (ଚିତ୍ର 2.11)

$\overline{OE}$ ଏବଂ $\overline{OF}$ ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : OE = OF ।

ଅଙ୍କନ : $\overline{OB}$ ଓ $\overline{OC}$ ଅଙ୍କନ କର ।



(ଚିତ୍ର 2.11)

ପ୍ରମାଣ : ଯେହେତୁ $\overline{OE} \perp \overline{AB}$,

$\overline{OE}$, $\overline{AB}$ କୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରିବ । (ଉପପାଦ୍ୟ - 7)

ସୁତରାଂ $AE = EB \Rightarrow EB = \frac{1}{2} AB$

ଯେହେତୁ $\overline{OF} \perp \overline{CD}$ ପୂର୍ବପରି ଆମେ ପାଇବା $CF = \frac{1}{2} CD$ ।

କିନ୍ତୁ AB = CD (ଦତ୍ତ) $\therefore EB = CF$ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ Δ OEB ଏବଂ Δ OFC ମଧ୍ୟରେ EB = CF (ପୂର୍ବରୁ ପ୍ରମାଣିତ),

OB = OC (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ) ଏବଂ $m\angle OEB = m\angle OFC$ (ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମକୋଣ)

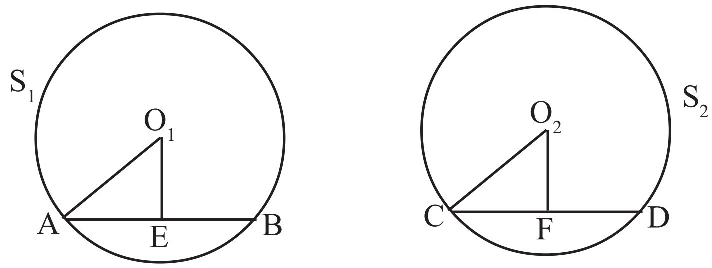
$\therefore \Delta OEB \cong \Delta OFC$ (ସମକୋଣ - ବାହୁ - କର୍ଣ୍ଣ)

$\Rightarrow OE = OF$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ମନ୍ତବ୍ୟ : ଉପରୋକ୍ତ ଉପପାଦ୍ୟ -୪, ଦୁଇଟି (ବା ତତୋଧିକ) ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ମଧ୍ୟ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ । ଏହାକୁ ମୂଳ ଉପପାଦ୍ୟ-୪ର ପ୍ରମାଣର ଧାରାରେ ସ୍ଥଳ ବିଶେଷରେ ସାମାନ୍ୟ ପରିବର୍ତ୍ତନ କରି ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇ ପାରିବ । ପରବର୍ତ୍ତୀ ସମୟରେ ଆମେ ଦେଖିବା ବୃତ୍ତ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଅନେକ ଗୁଡ଼ିଏ ଉପପାଦ୍ୟ / ପ୍ରମେୟ ଯାହା ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ଉଲ୍ଲେଖ କରାଯାଇଛି ସେଗୁଡ଼ିକ ଏକାଧିକ ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ମଧ୍ୟ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ । ତେବେ ସେଗୁଡ଼ିକର ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ପ୍ରମାଣ ଦିଆଯାଇନାହିଁ । ସେଗୁଡ଼ିକ ମୂଳ ଉପପାଦ୍ୟର ପ୍ରମାଣର ଧାରାରେ ହେବ । କେବଳ ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ଉପପାଦ୍ୟ - ୪ର ଅନୁରୂପ କଥନ ଏବଂ ପ୍ରମାଣ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

କଥନ : ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତର ସମାନ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ଜ୍ୟାମାନେ ନିଜ ନିଜ କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ ।

ଦତ୍ତ : ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ S_1 ଓ S_2 ର କେନ୍ଦ୍ର ଯଥାକ୍ରମେ O_1 ଏବଂ O_2 (ଚିତ୍ର 2.12) ।



(ଚିତ୍ର 2.12)

$\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଯଥାକ୍ରମେ S_1 ଓ S_2 ର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ଏବଂ AB = CD ।

$\overline{O_1E} \perp \overline{AB}$ ଏବଂ $\overline{O_2F} \perp \overline{CD}$ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $O_1E = O_2F$

ଅଙ୍କନ : $\overline{O_1A}$ ଏବଂ $\overline{O_2C}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : ଯେହେତୁ $\overline{O_1E} \perp \overline{AB}$ ତେଣୁ $\overline{O_1E}$, $\overline{AB}$ କୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରିବ ।

ଅର୍ଥାତ୍ $AE = EB \Rightarrow AE = \frac{1}{2} AB$

ଯେହେତୁ $\overline{O_2F} \perp \overline{CD}$ ତେଣୁ ପୂର୍ବପରି ଆମେ ପାଇବା $CF = \frac{1}{2} CD$

କିନ୍ତୁ AB = CD (ଦତ୍ତ) । $\therefore AE = CF$ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ΔO_1EA ଏବଂ ΔO_2FC ମଧ୍ୟରେ

$\because$
- AE = CF (ପୂର୍ବରୁ ପ୍ରମାଣିତ)
- $O_1A = O_2C$ (ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)
- $m\angle O_1EA = m\angle O_2FC$ (ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମକୋଣ)

$\therefore \Delta O_1EA \cong \Delta O_2FC \Rightarrow O_1E = O_2F$ (ପ୍ରମାଣିତ)

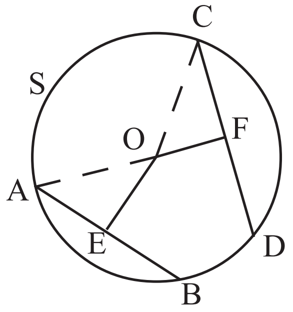
ପ୍ରମେୟ - 2.3 : ଉପପାଦ୍ୟ - 8ର ବିପରୀତ କଥନ ଓ ପ୍ରମାଣ :

ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ ଜ୍ୟାମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ।

[Chords of a circle equidistant from the centre are of equal length.]

ଦତ୍ତ : S ବୃତ୍ତରେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା । O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ।

$\overline{OE}$ ଏବଂ $\overline{OF}$ ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ । OE = OF



(ଚିତ୍ର 2.13)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : AB = CD

ଅଙ୍କନ : $\overline{OA}$ ଏବଂ $\overline{OC}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : Δ AEO ଏବଂ Δ CFO ମଧ୍ୟରେ

∵ OE = OF (ଦତ୍ତ)
OA = OC (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)
$m\angle OEA = m\angle OFC$ (ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମକୋଣ) ।

∴ Δ AEO ≅ Δ CFO (ସମକୋଣ - କର୍ଣ୍ଣ - ବାହୁ) ⇒ AE = CF .... (1)

∵ $\overline{OE} \perp \overline{AB}$, $\overline{OE}$, $\overline{AB}$ ଜ୍ୟାକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ (ଉପପାଦ୍ୟ - 7)

⇒ AE = EB ⇒ AB = 2AE

ସେହିପରି $\overline{OF} \perp \overline{CD}$ ⇒ CF = FD ⇒ CD = 2CF

କିନ୍ତୁ AE = CF (1 ରୁ) । ସୁତରାଂ AB = 2AE = 2CF = CD (ପ୍ରମାଣିତ)

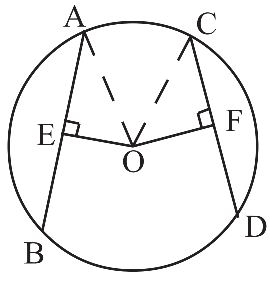
ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ପ୍ରମେୟ - 2.3 ର କଥନ :

ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତରେ ନିଜ ନିଜ କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ ଜ୍ୟା ମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ।

ଏହାର ପ୍ରମାଣ ମୂଳ ପ୍ରମେୟ - 2.3 ର ଅନୁରୂପ । ନିଜେ କର ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 : ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ମଧ୍ୟରେ, କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ ଦୂରବର୍ତ୍ତୀ ଜ୍ୟାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିକଟତର ଜ୍ୟାର ଦୈର୍ଘ୍ୟଠାରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରତର ।

[Of any two chords of a circle, the length of the one farther from the centre is smaller than the length of the other.]



(ଚିତ୍ର 2.14)

ଦତ୍ତ : O ଏକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର । $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ।

$\overline{OE} \perp \overline{AB}$ ଏବଂ $\overline{OF} \perp \overline{CD}$ । OF > OE (ଚିତ୍ର 2.14) ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : CD < AB

ଅଙ୍କନ : $\overline{OA}$ ଏବଂ $\overline{OC}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : Δ OEA ଏବଂ Δ OFC ଦ୍ୱୟ ସମକୋଣୀ

$OE^2 + EA^2 = OA^2$ ଏବଂ $OF^2 + FC^2 = OC^2$ (ପିଥାଗୋରାସ ଉପପାଦ୍ୟ ଅନୁଯାୟୀ)

କିନ୍ତୁ OA = OC (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)

$\therefore OE^2 + EA^2 = OF^2 + FC^2 \Rightarrow EA^2 - FC^2 = OF^2 - OE^2 > 0$ ($\because$ OF > OE (ଦତ୍ତ))

$\Rightarrow FC < EA \Rightarrow \frac{CD}{2} < \frac{AB}{2}$ [$\because \overline{OF} \perp \overline{CD}$ ଏବଂ $\overline{OE} \perp \overline{AB}$]

$\Rightarrow CD < AB$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଏକାଧିକ ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ -1ର ଅନୁରୂପ ପ୍ରମାଣ ମଧ୍ୟ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ । ଏହାର କଥନ ଓ ପ୍ରମାଣ ନିଜେ କର ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 2 : ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ମଧ୍ୟରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରତର ଜ୍ୟାଟି କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ ଅଧିକ ଦୂରବର୍ତ୍ତୀ ।

(ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 ର ବିପରୀତ)

[Of any two chords of a circle the smaller one is farther from the centre than the other.]

ଦତ୍ତ : O ଏକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର । $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ।

CD < AB । $\overline{OE} \perp \overline{AB}$ ଏବଂ $\overline{OF} \perp \overline{CD}$ (ଚିତ୍ର 2.14 ଦେଖ)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : OF > OE

ଅଙ୍କନ : $\overline{OA}$ ଏବଂ $\overline{OC}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : Δ OEA ଏବଂ Δ OFC ଦୁଇଟି ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ

$\therefore OE^2 + EA^2 = OA^2$ ଏବଂ $OF^2 + FC^2 = OC^2$ ....(i) (ପିଥାଗୋରାସଙ୍କ ସୂତ୍ର ଅନୁସାରେ)

କିନ୍ତୁ OA = OC (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)

$\therefore$ (i) ରୁ $OE^2 + EA^2 = OF^2 + FC^2 \Rightarrow OF^2 - OE^2 = EA^2 - FC^2$

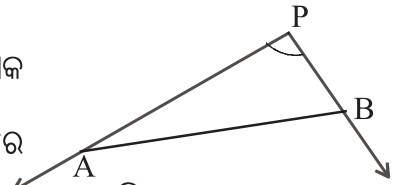
$\Rightarrow OF^2 - OE^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 - \left(\frac{CD}{2}\right)^2$ ($\because \overline{OE} \perp \overline{AB}$ ଏବଂ $\overline{OF} \perp \overline{CD}$)

$\Rightarrow OF^2 - OE^2 = \frac{1}{4}(AB^2 - CD^2) > 0$ ($\because$ AB > CD ଦତ୍ତ)

$\Rightarrow OF > OE$ (ପ୍ରମାଣିତ)

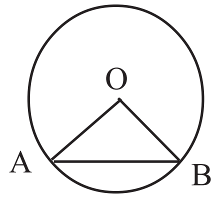
ଏକାଧିକ ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - **2** ର ଅନୁରୂପ ପ୍ରମାଣ ମଧ୍ୟ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ । ଏହାର କଥନ ଓ ପ୍ରମାଣ ନିଜେ କର ।

2.3 ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା କେନ୍ଦ୍ରରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣ (Angle subtended by the chord at the centre):



(ଚିତ୍ର 2.15(a))

$\overline{AB}$ ଏକ ରେଖାଖଣ୍ଡ । P, $\overleftrightarrow{AB}$ ଉପରେ ନ ଥିବା ଯେ କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଉ । $\overrightarrow{PA}$ ଓ $\overrightarrow{PB}$ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ $\angle APB$ କୁ $\overline{AB}$ ଦ୍ୱାରା P ଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣ (Angle subtended by $\overline{AB}$ at P) କୁହାଯାଏ (ଚିତ୍ର 2.15(a)) ।



(ଚିତ୍ର 2.15(b))

ସଂଜ୍ଞା : ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର $\overline{AB}$ ବ୍ୟାସ ଭିନ୍ନ ଏକ ଜ୍ୟା ଏବଂ O କେନ୍ଦ୍ର ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ $\angle AOB$ କୁ ଜ୍ୟା $\overline{AB}$ ଦ୍ୱାରା କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣ ଅଥବା $\overline{AB}$ ଜ୍ୟା ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ (Central angle) କୁହାଯାଏ । ଚିତ୍ର 2.15(b) ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ ।

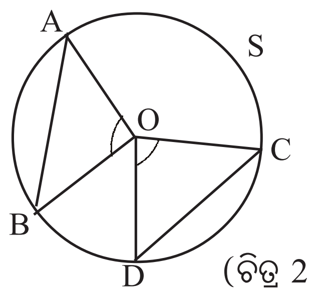
$\angle AOB$, $\overline{AB}$ ଜ୍ୟା ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଏକ କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ । କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ବିଶଦ ଆଲୋଚନା ପରେ ହେବ ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 9

ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଜ୍ୟା କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଯେଉଁ କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରନ୍ତି ସେମାନେ ସର୍ବସମ ।

[In a circle the angles subtended by two congruent chords at the centre are congruent.]

ଦତ୍ତ : S ବୃତ୍ତରେ O କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଜ୍ୟା (ଚିତ୍ର 2.16) । $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଯଥାକ୍ରମେ $\angle AOB$ ଏବଂ $\angle COD$ ଉତ୍ପନ୍ନ କରନ୍ତି ।



(ଚିତ୍ର 2.16)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\angle AOB \cong \angle COD$

ପ୍ରମାଣ : Δ AOB ଏବଂ Δ OCD ମଧ୍ୟରେ

$\begin{cases} OA = OC, OB = OD \text{ (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)} \\ AB = CD \text{ (ଦତ୍ତ)} \end{cases}$

$\therefore \Delta OAB \cong \Delta OCD$ (ବାହୁ-ବାହୁ-ବାହୁ) $\Rightarrow \angle AOB \cong \angle COD$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ଉପପାଦ୍ୟ - 9 ର କଥନ : **ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଜ୍ୟା ନିଜ ନିଜ କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଯେଉଁ କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରନ୍ତି ସେମାନେ ସର୍ବସମ ।** ଏହାର ପ୍ରମାଣ ନିଜେ କର ।

ପ୍ରମେୟ - 2.4 : ଉପପାଦ୍ୟ - 9 ର ବିପରୀତ କଥନ ଓ ପ୍ରମାଣ :

ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ହେଲେ ଜ୍ୟା ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ହେବେ ।

(In a circle the chords subtending congruent angles at the centre are congruent.)

ଦତ୍ତ : S ବୃତ୍ତରେ O କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା । $\angle AOB \cong \angle COD$ (ଚିତ୍ର 2.16)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : AB = CD

ପ୍ରମାଣ : Δ OAB ଏବଂ Δ OCD ମଧ୍ୟରେ

$\because$ OA = OC, OB = OD (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ) ଏବଂ $m\angle AOB = m\angle COD$ (ଦତ୍ତ)

$\therefore$ $\Delta OAB \cong \Delta OCD$ (ବାହୁ-କୋଣ-ବାହୁ)

$\Rightarrow$ AB = CD (ପ୍ରମାଣିତ)

ଏକାଧିକ ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ପ୍ରମେୟ - 2.4 ର ଅନୁରୂପ ପ୍ରମାଣ ମଧ୍ୟ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ । ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ଏହାର କଥନ:

ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ନିଜ ନିଜ କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ହେଲେ ଜ୍ୟା ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ହେବେ । ଏହାର ପ୍ରମାଣ ନିଜେ କର ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 2 (a)

(କ - ବିଭାଗ)

1. ଉକ୍ତିଟି ଠିକ୍ ଥିଲେ T ଏବଂ ଭୁଲ ଥିଲେ F ଲେଖ ।

i) ଏକ ସମତଳରେ ଥିବା ଏକ ବକ୍ରରେଖାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁ ଉକ୍ତ ସମତଳ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦୂରତାରେ ଥିଲେ ବକ୍ରରେଖାଟିକୁ ବୃତ୍ତ କୁହାଯାଏ ।

ii) ବୃତ୍ତର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁ କୌଣସି ଏକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧର ଏକ ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଅଟେ ।

iii) ଏକ ବୃତ୍ତର ଅସଂଖ୍ୟ ବ୍ୟାସ ରହିଛି ।

iv) କେନ୍ଦ୍ର, ବୃତ୍ତର ଏକମାତ୍ର ବିନ୍ଦୁ ଯାହା ବୃତ୍ତର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବ୍ୟାସ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

v) ଏକ ଜ୍ୟା ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦେଶକୁ ଯେଉଁ ଦୁଇ ଅଂଶରେ ବିଭକ୍ତ କରେ ସେମାନେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ ଅଟନ୍ତି ।

vi) ବୃତ୍ତର ଏକ ବ୍ୟାସ ଗୋଟିଏ ଜ୍ୟାକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କଲେ ସେମାନେ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଅଟନ୍ତି ।

vii) ପ୍ରତ୍ୟେକ ତ୍ରିଭୁଜର ପରିକେନ୍ଦ୍ର ଏହାର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ।

viii) ଏକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର, ଏହାର ଏକମାତ୍ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ଯାହାଠାରୁ ବୃତ୍ତର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁର ଦୂରତା ସମାନ ।

ix) ଏକ ରଶ୍ମୀ ବୃତ୍ତକୁ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । ତେବେ ରଶ୍ମୀର ଆଦ୍ୟ ବିନ୍ଦୁଟି ବୃତ୍ତର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ହେବ ।

x) ଏକ ବୃତ୍ତରେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{BC}$ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଜ୍ୟା ହେଲେ B ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ, $\angle ABC$ କୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ ।

(xi) ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ ଦୁଇ ବା ତତୋଧିକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ହୋଇପାରିବ ନାହିଁ ।

(xii) ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତକୁ ସର୍ବଦା ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ ।

2. ପ୍ରଦତ୍ତ ସମ୍ଭାବ୍ୟ ଉତ୍ତରରୁ ଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟି ବାଛି ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

i) ଦୁଇଟି ଅସମାନ୍ତର ଜ୍ୟାର ଛେଦବିନ୍ଦୁ .... ଅଟେ ।

a) ବୃତ୍ତର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ b) ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ

c) ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ d) ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ କିମ୍ବା ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ

ii) P ବିନ୍ଦୁ ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ବୃତ୍ତ ଉପରେ P ଠାରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ .... ଯୋଡ଼ା ବିନ୍ଦୁ ଅଛି ।

a) 1 b) 2 c) 8 d) ଅସଂଖ୍ୟ

iii) ଗୋଟିଏ ରେଖାଖଣ୍ଡ ସର୍ବାଧିକ .... ଟି ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ହୋଇ ପାରିବ ।

a) 1 b) 2 c) 4 d) ଅସଂଖ୍ୟ

iv) ଗୋଟିଏ ରେଖାଖଣ୍ଡ ସର୍ବାଧିକ .... ଟି ବୃତ୍ତର ଜ୍ୟା ହୋଇପାରିବ ।

a) 1 b) 2 c) 4 d) ଅସଂଖ୍ୟ

v) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଏକ ଜ୍ୟାର ଗୋଟିଏ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ 5 ସେ.ମି. ଦୂରରେ ଏବଂ ଜ୍ୟାଟିର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ 3 ସେ.ମି ଦୂରରେ ଅଛି । ଜ୍ୟାଟିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ .... ସେ.ମି. ।

a) 8 b) 12 c) 16 d) 20

(ଖ - ବିଭାଗ)

3. ଏକ ବୃତ୍ତର 16 ସେ.ମି. ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ଜ୍ୟା ଏକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $\overline{OP}$ ଦ୍ୱାରା D ବିନ୍ଦୁରେ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡିତ ହୁଏ । ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 10 ସେମି. ହେଲେ $\overline{DP}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O । ଏକ ଜ୍ୟା $\overline{AB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ D ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\overline{OD}$, $\angle AOB$ କୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ ।

5. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O । ଏହାର $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଜ୍ୟା । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\overline{OA}$, $\angle BAC$ କୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ ।

6. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଏହାର ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ଜ୍ୟା । P ଓ Q ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ O ବିନ୍ଦୁ, $\overleftrightarrow{PQ}$ ଉପରିସ୍ଥ ହେବ ।

7. ଗୋଟିଏ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ପରିକେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁମାନେ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ - ପ୍ରମାଣ କର ।

8. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ବୃତ୍ତରେ ଏକ ବ୍ୟାସ ଏହାର ବୃହତ୍ତମ ଜ୍ୟା । (ସୂଚନା : ଏକ ଜ୍ୟାର କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ ଦୂରତା $d \geq 0$ ଏବଂ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r ହେଲେ ଜ୍ୟାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $2\sqrt{r^2 - d^2} \leq 2r$ = ବ୍ୟାସ) ।

9. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ଜ୍ୟାର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଅବସ୍ଥିତ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ନୁହଁନ୍ତି ।

10. $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ଜ୍ୟା । AB = CD = 8 ସେମି. । ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 5 ସେମି. ହେଲେ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ଗ - ବିଭାଗ)

11. 10 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ଜ୍ୟା $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା 10 ସେମି. । $\overline{AB}$ ଜ୍ୟା କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ 6 ସେ.ମି. ଦୂରରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେଲେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

12. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ΔABC ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ ହୋଇଛି । ଯଦି AB = AC ହୁଏ ପ୍ରମାଣ ଯେ $\angle BAC$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ରଶ୍ମି ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଅଟେ ।

13. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ଏକ ବ୍ୟାସ ଦ୍ୱାରା ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡିତ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କରେ ଯେ ଜ୍ୟା ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ।

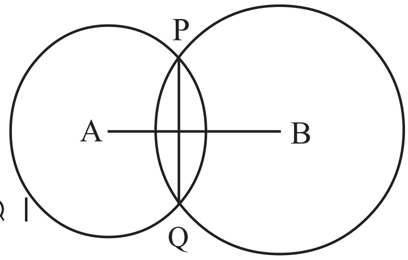
14. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ପରସ୍ପରକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କଲେ ସେମାନଙ୍କ ଛେଦବିନ୍ଦୁ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ହେବ । (ସୂଚନା : ଅସମ୍ଭବାୟନ ପ୍ରଣାଳୀ (Method of contradiction) ବ୍ୟବହାର କର)

15. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା $\overline{AB}$ ଓ $\overline{BC}$, B ଠାରେ 90^0 କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରନ୍ତି । ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ A, O ଏବଂ C ଏକ ଏକରେଖୀୟ ।

16. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ କର୍ଣ୍ଣର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ, ଏହାର ପରିବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଅଟେ ।

17. $\overline{PQ}$ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଜ୍ୟା । P ଓ Q ଠାରେ ଉକ୍ତ ଜ୍ୟା ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ ବୃତ୍ତକୁ ଯଥାକ୍ରମେ R ଓ S ଠାରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ PQSR ଏକ ଆୟତ ଚିତ୍ର ।

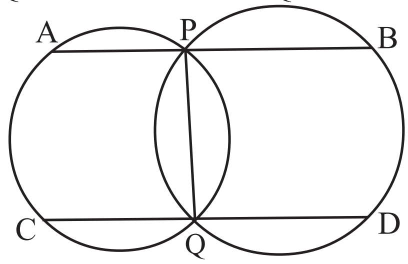
18. ଚିତ୍ର 2.17ରେ A ଓ B ଦୁଇଟି ପରସ୍ପର ଛେଦୀ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ P ଓ Q ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁ ଅଟନ୍ତି ।
ପ୍ରମାଣ କର ଯେ (i) $\overleftrightarrow{AB}$, $\overline{PQ}$ ସାଧାରଣ ଜ୍ୟାକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ ।
.. ଏବଂ (ii) $\overleftrightarrow{AB} \perp \overline{PQ}$



(ଚିତ୍ର 2.17)

(ସୂଚନା : $\overline{AB}$ ଓ $\overline{PQ}$ ର ଛେଦବିନ୍ଦୁ C ହେଲେ ΔACP ଓ ΔACQ ଏବଂ ΔAPB ଓ ΔAQB ମଧ୍ୟରେ ତୁଳନା କର)

19. ଚିତ୍ର 2.18ରେ ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ ପରସ୍ପରକୁ P ଓ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । P ଠାରେ $\overline{PQ}$ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟକୁ A ଓ B ଠାରେ ଛେଦ କରେ ଓ ସେହିପରି Q ଠାରେ $\overline{PQ}$ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟକୁ C ଓ D ଠାରେ ଛେଦ କରେ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ AB = CD

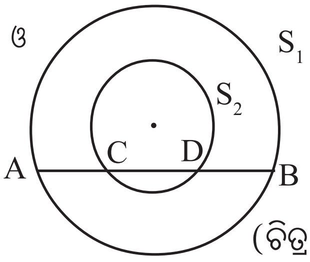


(ଚିତ୍ର 2.18)

20. A ଓ B କେନ୍ଦ୍ର ବିଶିଷ୍ଟ ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ ପରସ୍ପରକୁ P ଓ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । P ମଧ୍ୟ ଦେଇ $\overline{AB}$ ସହିତ ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟକୁ M ଓ N ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, MN = 2AB । (ସୂଚନା : $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$, $\overline{MN}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କରି ଦର୍ଶାଅ ଯେ, AB = CD)

21\. ଚିତ୍ର 2.19 ରେ ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଦୁଇଟି ଏକ କେନ୍ଦ୍ରିକ ବୃତ୍ତ S_1 ଓ S_2 କୁ ଯଥାକ୍ରମେ A, C, D ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଛି ।

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ AC = DB ।



(ଚିତ୍ର 2.19)

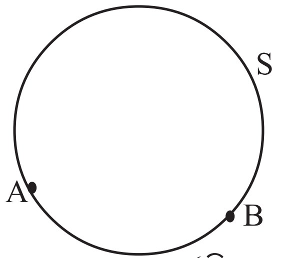
22\. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P ମଧ୍ୟ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ଦୁଇଟି ଛେଦକ ବୃତ୍ତକୁ A, B ଏବଂ C, D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି ଯେପରି P-A-B ଏବଂ P-C-D । ଯଦି AB = CD ହୁଏ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ PA = PC ଏବଂ $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ ।

23\. ABC ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O । ଏହାର ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଜ୍ୟା $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ପରସ୍ପରକୁ ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । B ଓ C, $\overline{OP}$ ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,(i) PA = PC ଏବଂ (ii) $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ ।

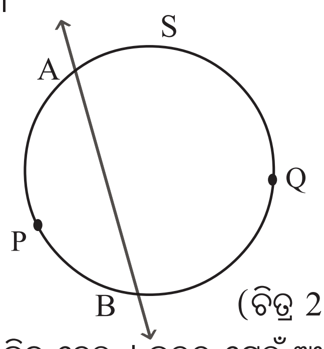
(ସୂଚନା : $\overline{OE} \perp \overline{AB}$ ଏବଂ $\overline{OF} \perp \overline{CD}$ ଅଙ୍କନ କରି O, P ଯୋଗ କର)

2.4 ଚାପ (Arc) :

ଚିତ୍ର 2.20ରେ S ଏକ ବୃତ୍ତ ଏବଂ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ଉପରେ A ଓ B ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ବୃତ୍ତଟି A ଓ B ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱାରା ଦୁଇ ଭାଗରେ ବିଭକ୍ତ ହୁଏ । A ଓ B ବିନ୍ଦୁ ସମେତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଭାଗକୁ ଆମେ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଚାପ କହିବା । ଅନ୍ୟ ପ୍ରକାର କହିଲେ A ଓ B ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟ ସହିତ "A ଠାରୁ B ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ" ବୃତ୍ତର ଏକ ଅବିଛିନ୍ନ ଅଂଶ ହେଉଛି ଏକ ଚାପ । ଚିତ୍ର 2.21ରେ $\overleftrightarrow{AB}$, S ବୃତ୍ତର ଏକ ଛେଦକ (Secant) ।



(ଚିତ୍ର 2.20)



(ଚିତ୍ର 2.21)

P, ଛେଦକ $\overleftrightarrow{AB}$ ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଅନ୍ୟ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଉ । ବୃତ୍ତର ଯେଉଁ ଅଂଶରେ P ବିନ୍ଦୁ ଅଛି ସେହି ଅଂଶଟିକୁ APB ଅଥବା BPA ଚାପ କୁହାଯାଏ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ଚାପର ସଂଜ୍ଞା ନିମ୍ନମତେ କରିବା।

ସଂଜ୍ଞା : ଏକ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ A ଓ B ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ A ଓ B ବିନ୍ଦୁ ସମେତ $\overline{AB}$ ଜ୍ୟାର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିବା ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ସେଟ୍‌କୁ ଏକ ଚାପ କୁହାଯାଏ । ଉକ୍ତ ସେଟ୍ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ P ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ଉତ୍ପନ୍ନ ଚାପକୁ APB କିମ୍ବା BPA ଚାପ ରୂପେ ନାମିତ କରାଯାଏ ଏବଂ ଉକ୍ତ ଚାପକୁ $\overset{\frown}{APB}$ କିମ୍ବା $\overset{\frown}{BPA}$ ସଂକେତ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ ।

$\overset{\frown}{APB}$ ଏକ ଚାପ ହେଲେ A ଓ B, ଚାପର ଦୁଇଟି ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ (End points) ଅଟନ୍ତି ଏବଂ ଚାପର ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁଙ୍କୁ ଚାପର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ (Interior points) କୁହାଯାଏ । Q, ଛେଦକ $\overleftrightarrow{AB}$ ର ଅପର ପାର୍ଶ୍ୱରେ (ଚିତ୍ର 2.21) ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ AQB ଚାପକୁ $\overset{\frown}{AQB}$ ବା $\overset{\frown}{BQA}$ ସଂକେତ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶ କରିବା ।

A ଓ B ଉଭୟ $\overset{\frown}{APB}$ ଏବଂ $\overset{\frown}{AQB}$ ଚାପର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଅଟନ୍ତି । $\overset{\frown}{APB}$ ଓ $\overset{\frown}{AQB}$ ଚାପଦ୍ୱୟକୁ ପରସ୍ପରର **ବିପରୀତ ଚାପ (Opposite arc)** କୁହାଯାଏ । ଉକ୍ତ ଚାପ ଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଗରେ ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ବୃତ୍ତଟି ଗଠିତ ହେଉଥିବାରୁ ଗୋଟିକୁ ଅପରର **ପରିପୂରକ ଚାପ (Supplementary arc)** ମଧ୍ୟ କୁହାଯାଏ । ଏହି ଚାପଦ୍ୱୟକୁ $\overline{AB}$ **ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ବା ଛେଦିତ** ଚାପ କୁହାଯାଏ ଏବଂ $\overline{AB}$ ଜ୍ୟାକୁ ଉଭୟ **ଚାପର ସମ୍ପୃକ୍ତ ଜ୍ୟା (Corresponding chord)** କୁହାଯାଏ ।

2.4.1 କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ, ବୃହତ୍‌ଚାପ ଏବଂ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ (Minor arc, Major arc and semi circle) :

କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ, ବୃହତ୍‌ଚାପ :

ଯଦି କୌଣସି ଚାପ $\overset{\frown}{APB}$ ର P ବିନ୍ଦୁ ଏବଂ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ବିନ୍ଦୁ ସମ୍ପୃକ୍ତ $\overline{AB}$ ଜ୍ୟାର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ ହୁଅନ୍ତି ତେବେ $\overset{\frown}{APB}$ କୁ ଏକ **କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ (Minor arc)** କୁହାଯାଏ । ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପର ବିପରୀତ ଚାପକୁ **ବୃହତ୍‌ଚାପ (Major arc)** କୁହାଯାଏ ।

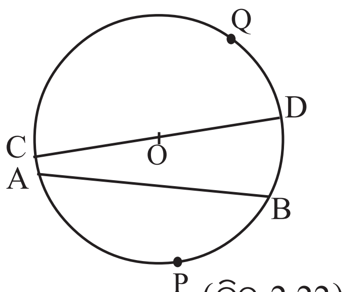
ଚିତ୍ର 2.22ରେ $\overset{\frown}{APB}$ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ ଓ $\overset{\frown}{AQB}$ ବୃହତ୍ ଚାପ ଅଟନ୍ତି । $\overset{\frown}{APB}$ ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ ହେଲେ ଏହାକୁ 'AB କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ' ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ ଓ ସେହିପରି $\overset{\frown}{AQB}$ ବୃହତ୍ ଚାପକୁ "AB ବୃହତ୍ ଚାପ" ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ ।

ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ :

ଏକ ବୃତ୍ତରେ କୌଣସି ଚାପର ସମ୍ପୃକ୍ତ ଜ୍ୟା ବୃତ୍ତର ଏକ ବ୍ୟାସ ହେଲେ ଚାପଟିକୁ ଏକ **ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ (Semi circle)** କୁହାଯାଏ । ଚିତ୍ର 2.22ରେ $\overset{\frown}{CQD}$ ଏବଂ $\overset{\frown}{CPD}$ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ ଅଟନ୍ତି । ସଂଜ୍ଞାନୁସାରେ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ ବା ବୃହତ୍ ଚାପ ନୁହେଁ । ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତର ବିପରୀତ ଚାପ ମଧ୍ୟ ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ ।

2.4.2 ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ (Length of the arc) :

ଯେପରି ପ୍ରତ୍ୟେକ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମାପ ରହିଅଛି ସେହିପରି ବୃତ୍ତରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମାପ ରହିଅଛି । ଏହାର ମାପ ପ୍ରଣାଳୀ ପରିମିତିରେ ଆଲୋଚନା କରାଯିବ । ତେବେ $\overline{AB}$ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଚାପ ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରୁ କ୍ଷୁଦ୍ର ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବୃହତ୍ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟଠାରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରତର । ଚାପର **ଦୈର୍ଘ୍ୟ (length)କୁ** ℓ ଚିହ୍ନ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ । $\ell\overset{\frown}{APQ}$, $\overset{\frown}{APQ}$ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟମାପକୁ ସୂଚାଏ । ଦୁଇ ବିପରୀତ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟି ବୃତ୍ତର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଅଟେ । ବୃତ୍ତର ଦୈର୍ଘ୍ୟକୁ ବୃତ୍ତର **ପରିଧି (Circumference)** କୁହାଯାଏ ।



(ଚିତ୍ର 2.22)

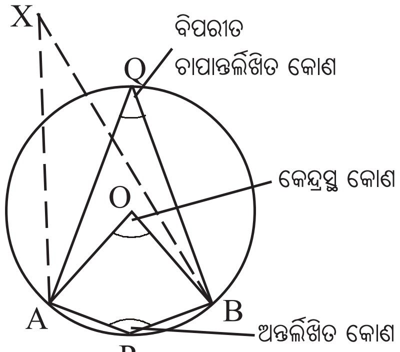
ସନ୍ନିହିତ ଚାପ (Adjacent arcs):

ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଦୁଇଟି ଚାପର ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ଥିଲେ ଉକ୍ତ ବିନ୍ଦୁଟି ପ୍ରତ୍ୟେକ ଚାପର ଏକ ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ହେବ ଏବଂ ଏହିପରି ଦୁଇଟି ଚାପକୁ **ସନ୍ନିହିତ ଚାପ (Adjacent arcs)** କୁହାଯାଏ । ଦୁଇଟି ସନ୍ନିହିତ ଚାପର ସଂଯୋଗରେ ନୂତନ ଚାପ ଗଠିତ ହୁଏ । ଚିତ୍ର 2.22ରେ $\overset{\frown}{QCA}$ ଏବଂ $\overset{\frown}{APB}$ ଦୁଇଟି ସନ୍ନିହିତ ଚାପର ସଂଯୋଗରେ $\overset{\frown}{QAB}$ ଗଠିତ ହେଉଅଛି ।

ମନେରଖ : ଦୁଇଟି ବୃହତ୍ ଚାପ କିମ୍ବା ଦୁଇଟି ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ ସନ୍ନିହିତ ଚାପ ହୋଇପାରିବେ ନାହିଁ ।

2.5 ଚାପ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣ (Angle subtended by an arc):

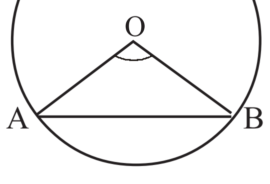
ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ (ଚିତ୍ର 2.23) $\overset{\frown}{APB}$ ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ର ଚାପ । X, $\overline{AB}$ ଜ୍ୟା ଉପରେ ନ ଥିବା ବୃତ୍ତର ସମତଳରେ ଅନ୍ୟ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ $\angle AXB$ କୁ $\overset{\frown}{APB}$ ଚାପ ଦ୍ୱାରା X ଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣ (angle subtended at X) କୁହାଯାଏ । ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ହେଲେ $\angle AOB$ କୁ $\overset{\frown}{APB}$ ଦ୍ୱାରା କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣ ବା ସଂକ୍ଷେପରେ $\overset{\frown}{APB}$ ର **କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ (Central angle)** କୁହାଯାଏ । ଅର୍ଥାତ୍ **ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ର ଚାପ ଦ୍ୱାରା କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣ ଉକ୍ତ ଚାପର କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ ।**



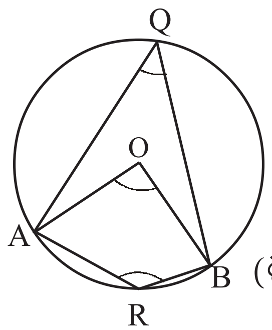
(ଚିତ୍ର 2.23)

$\overset{\frown}{AB}$ ର P ଯେକୌଣସି ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ $\angle APB$ କୁ $\overset{\frown}{AB}$ ଚାପର ଏକ **ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ (Inscribed angle)** କୁହାଯାଏ । Q, $\overset{\frown}{APB}$ ର ବିପରୀତ ଚାପ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ $\angle AQB$ କୁ $\overset{\frown}{APB}$ ଚାପର **ବିପରୀତ ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ** ବା **ପରିପୂରକ ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ (Angle subtended at a point on the opposite arc or supplementary arc)** କୁହାଯାଏ । (ଚିତ୍ର 2.23 ଦେଖ)

ଆମେ ପୂର୍ବରୁ ଜାଣିଛେ, $\angle AOB$ ଟି $\overline{AB}$ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ । ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ $\overline{AB}$ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ ଏବଂ $\overset{\frown}{AB}$ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ ଦ୍ୱୟ ଅଭିନ୍ନ (ଚିତ୍ର 2.24 ଦେଖ) । ଚିତ୍ର 2.25ରେ $\overset{\frown}{AQB}$ ଏକ ବୃହତ୍ ଚାପ ।



(ଚିତ୍ର 2.24)

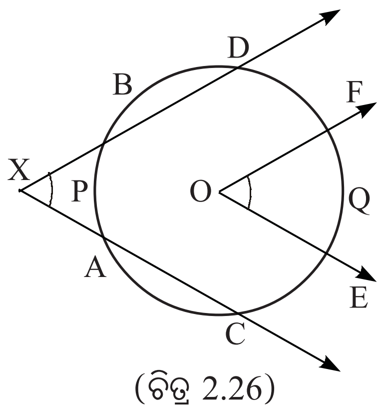


(ଚିତ୍ର 2.25)

$\overset{\frown}{ARB}$ ଦ୍ୱାରା Q ଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣ $\angle AQB$, $\overset{\frown}{AQB}$ ର ଏକ ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ । $\angle ARB$, $\overset{\frown}{AQB}$ ର ଏକ ବିପରୀତ ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ।

2.5.1 କୋଣ ଦ୍ୱାରା ଛେଦିତ ଚାପ (Arc intercepted by an angle) :

ଗୋଟିଏ କୋଣର ବାହୁଦ୍ୱୟ ଏକ ବୃତ୍ତକୁ ଛେଦ କଲେ, କୋଣର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ଥିବା ଚାପ, ଯାହାର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ କୋଣର ଦୁଇବାହୁ ଉପରିସ୍ଥ ହୁଅନ୍ତି, ତାହାକୁ **ଉକ୍ତ କୋଣଦ୍ୱାରା ଛେଦିତ ଚାପ କୁହାଯାଏ ।** ଚିତ୍ର 2.26ରେ $\angle EOF$ କୋଣ ଦ୍ୱାରା ଛେଦିତ ଚାପ ହେଉଛି $\overset{\frown}{EQF}$ ଏବଂ $\angle AXB$ ଦ୍ୱାରା ଛେଦିତ ଚାପଦ୍ୱୟ ହେଲେ $\overset{\frown}{APB}$ ଏବଂ $\overset{\frown}{CQD}$ ।



(ଚିତ୍ର 2.26)

2.6 ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ (Degree measure of an arc):

ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଏକ କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରେ । କୋଣ ମାପ ପାଇଁ ତିନି ପ୍ରକାର ପରିମାପ; ଯଥା: ଡିଗ୍ରୀ, ରେଡ଼ିଆନ ଓ ଗ୍ରେଡ୍ ବ୍ୟବହୃତ ହୁଏ । ତଦନୁଯାୟୀ ଚାପର ତିନି ପ୍ରକାରର ପରିମାପର ସଂଜ୍ଞା ଦିଆଯାଇପାରିବ । ନିମ୍ନରେ ଯେକୌଣସି ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପର ସଂଜ୍ଞା ଦିଆଯାଇଛି ।

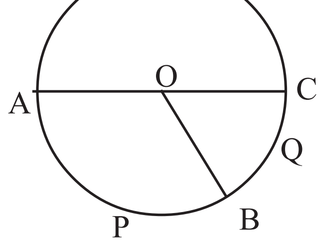
ସଂଜ୍ଞା : ଗୋଟିଏ ଚାପ $\overset{\frown}{APB}$ ର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ 0 ଓ 360 ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଯାହା $m\overset{\frown}{APB}$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୁଏ ଏବଂ ନିମ୍ନମତେ ସ୍ଥିରୀକୃତ ହୁଏ :

O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ହେଲେ,

(i) $m\overset{\frown}{APB}$ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ = $m\angle AOB$

(ii) $m\overset{\frown}{APB}$ ଅର୍ଦ୍ଧ ବୃତ୍ତ = 180^0

(iii) $m\overset{\frown}{APB}$ ବୃହତ୍‌ଚାପ = $360^0 - m\angle AOB$



(ଚିତ୍ର 2.27)

ସଂଜ୍ଞାନୁଯାୟୀ **ଏକ ଚାପ ଓ ଏହାର ବିପରୀତ ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପର ସମଷ୍ଟି 360^0 ।**

ଚିତ୍ର 2.27ରେ $\overline{AC}$ ବ୍ୟାସ ଓ $m\angle AOB = 120^0$ ହେଲେ $m\overset{\frown}{APB} = 120^0$, $m\overset{\frown}{APC} = 180^0$, $m\overset{\frown}{BQC} = 60^0$ ଏବଂ $m\overset{\frown}{ACB} = 360^0 - 120^0 = 240^0$ ହେବ ।

(**ସୂଚନା:** ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ ପରି ଏହାର ରେଡ଼ିଆନ୍ ପରିମାପ 0 ଓ 2π ମଧ୍ୟରେ ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ଗ୍ରେଡ୍ ପରିମାପ 0 ଓ 400 ମଧ୍ୟରେ ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା । ଉଚ୍ଚତର ଗଣିତରେ ରେଡ଼ିଆନ୍ ପରିମାପର ବହୁଳ ବ୍ୟବହାର ହୁଏ । ଏହାର ଆଲୋଚନା ପରିମିତିରେ କରାଯିବ । ଏଠାରେ କେବଳ ଏତିକି କୁହାଯାଇପାରେ ଯେ **ଗୋଟିଏ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମ୍ପୃକ୍ତ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ସହ ସମାନ ହେଲେ ଚାପଟିର କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣର ରେଡ଼ିଆନ୍ ପରିମାଣ 1^C ଅଟେ ଏବଂ ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାଣ $\frac{180}{\pi}$ ଅଟେ ।** ସାଧାରଣ ଭାବେ ଯେକୌଣସି ଚାପ $\overset{\frown}{APB}$ ର ରେଡ଼ିଆନ୍ ପରିମାଣ $\frac{l\,\overset{\frown}{APB}}{\text{ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ}}$)

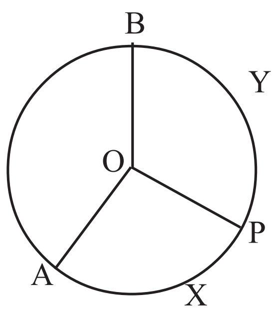
ଚିତ୍ର 2.28ରେ $\overset{\frown}{AXP}$ ଓ $\overset{\frown}{PYB}$ ଦୁଇଟି ସନ୍ନିହିତ ଚାପ ଏବଂ P ସେମାନଙ୍କର ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ । ଉକ୍ତ ଚାପଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଗରେ ଗଠିତ $\overset{\frown}{APB}$ ର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଚାପଦ୍ୱୟର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପର ସମଷ୍ଟି ହେବ ।

ଅର୍ଥାତ୍ $m\overset{\frown}{APB} = m\overset{\frown}{AXP} + m\overset{\frown}{PYB}$

ସେହିପରି ସନ୍ନିହିତ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟକୁ ବିଚାରକୁ ନେଲେ ଆମେ ପାଇବା

$l\,\overset{\frown}{APB} = l\,\overset{\frown}{AXP} + l\,\overset{\frown}{PYB}$

ଏହାର ପ୍ରମାଣ ଆମର ଆଲୋଚନା ପରିସରଭୁକ୍ତ ନୁହେଁ ।



(ଚିତ୍ର 2.28)

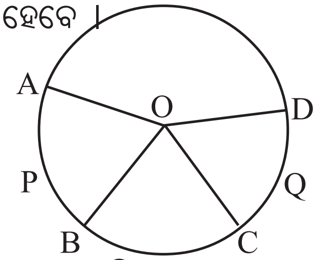
2.6.1 ଚାପର ସର୍ବସମତା (Congruence of arcs) :

ସଂଜ୍ଞା : ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ (ଅଥବା ଦୁଇ ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତରେ) ଦୁଇଟି ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ ସମାନ ହେଲେ ଚାପ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ (Congruent) ହୁଅନ୍ତି ।

ଚିତ୍ର 2.29ରେ $m\angle AOB = m\angle COD \Leftrightarrow \widehat{APB} \cong \widehat{CQD}$ ।

ଏଥିରୁ ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ

(i) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପର କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ଏବଂ ବିପରୀତ କ୍ରମେ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପର କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହେଲେ କ୍ଷୁଦ୍ର ଚାପଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହେବେ ।



(ଚିତ୍ର 2.29)

(ii) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ ସର୍ବସମ ହେଲେ ସେମାନଙ୍କର ବିପରୀତ ବୃହତ୍ ଚାପ ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟ ସର୍ବସମ ହେବେ । ଏହାର ବିପରୀତ ଉକ୍ତିଟି ମଧ୍ୟ ସତ୍ୟ ।

(iii) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ ସର୍ବସମ ।

ଉପରୋକ୍ତ ତଥ୍ୟ (i) ରୁ (iii) ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ମଧ୍ୟ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ।

ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଚାପର କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ ପରିମାପ ସହ ସମାନୁପାତୀ । କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ ପରିମାଣର ହ୍ରାସ ବା ବୃଦ୍ଧି ସହିତ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମାନୁପାତିକ ହ୍ରାସ ବା ବୃଦ୍ଧି ଘଟିଥାଏ ।

ମନେରଖ : ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ହୁଏ ଏବଂ ବିପରୀତ କ୍ରମେ ସମାନ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ଚାପଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହୁଅନ୍ତି ।

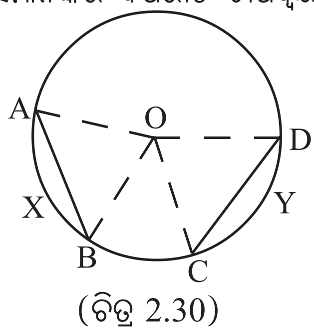
ଉପପାଦ୍ୟ - 10

ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଚାପ ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଜ୍ୟାଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ।

(Corresponding chords of two congruent arcs in a circle are congruent.)

ଦତ୍ତ : ABC ବୃତ୍ତରେ O କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ $\widehat{AXB}$ ଓ $\widehat{CYD}$ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ କ୍ଷୁଦ୍ର ଚାପ । $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଚାପଦ୍ୱୟର ସମ୍ପୃକ୍ତ ଜ୍ୟା (ଚିତ୍ର 2.30) ।

(ଯଦି $\widehat{AXB}$ ଓ $\widehat{CYD}$ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃହତ୍ ଚାପ ହୁଅନ୍ତି ତେବେ ସେମାନଙ୍କର ବିପରୀତ ଚାପଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ ହେବେ । ସୁତରାଂ କେବଳ କ୍ଷୁଦ୍ର ଚାପ ପାଇଁ ପ୍ରମାଣ ଯଥେଷ୍ଟ ।)



(ଚିତ୍ର 2.30)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

ଅଙ୍କନ : $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ ଏବଂ $\overline{OD}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : Δ OAB ଏବଂ Δ OCD ମଧ୍ୟରେ

$\because$ OA = OC, OB = OD (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)

$m\angle AOB = m\angle COD$ ($\because \widehat{AXB} \cong \widehat{CYD}$ ହେତୁ ସେମାନଙ୍କର ଡ଼ିଗ୍ରୀ ପରିମାପ ସମାନ)

ଅତଏବ Δ OAB ≅ Δ OCD (ବାହୁ - କୋଣ - ବାହୁ ସର୍ବସମତା)

$\Rightarrow AB = CD \Rightarrow \overline{AB} \cong \overline{CD}$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ମନ୍ତବ୍ୟ - 1 : ଉପରୋକ୍ତ ଉପପାଦ୍ୟ -10 ରେ $\widehat{AXB}$ ଓ $\widehat{CYD}$ ଚାପଦ୍ୱୟ ଦୁଇଟି ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ ହେଲେ ସେମାନଙ୍କ ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହେବେ କାରଣ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ଏକା ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ବ୍ୟାସ ଅଟନ୍ତି ।

2. ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ଉପପାଦ୍ୟ - 10 ମଧ୍ୟ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ । ଅର୍ଥାତ୍ **ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତରେ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଚାପ ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ।** ଏହାର ପ୍ରମାଣ ଉପପାଦ୍ୟ-10 ର ପ୍ରମାଣର ଅନୁରୂପ ହେବ ।

ପ୍ରମେୟ - 2.5 : ଉପପାଦ୍ୟ - 10 ର ବିପରୀତ କଥନ ଓ ପ୍ରମାଣ :

କୌଣସି ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ସର୍ବସମ ହେଲେ ସେମାନଙ୍କ ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ (i) କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ଏବଂ (ii) ବୃହତ୍ ଚାପ ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ।

[If two chords of a circle are congruent, then the corresponding (i) minor arcs are congruent and (ii) major arcs are congruent.]

ଦତ୍ତ : ABC ବୃତ୍ତରେ O କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଜ୍ୟା । $\widehat{AXB}$ ଓ $\widehat{CYD}$ ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଜ୍ୟା ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ ଏବଂ $\widehat{AYB}$ ଓ $\widehat{CXD}$ ସମ୍ପୃକ୍ତ ବୃହତ୍ ଚାପ । (ଚିତ୍ର 2.31)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : (i) $\widehat{AXB} \cong \widehat{CYD}$ ଏବଂ (ii) $\widehat{AYB} \cong \widehat{CXD}$

ଅଙ୍କନ : $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ ଏବଂ $\overline{OD}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : Δ OAB ଏବଂ Δ OCD ମଧ୍ୟରେ

$\because \begin{cases} OA = OC, OB = OD \text{ (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)} \\ AB = CD \; (\because \overline{AB} \cong \overline{CD} \text{ ଦତ୍ତ}) \end{cases}$

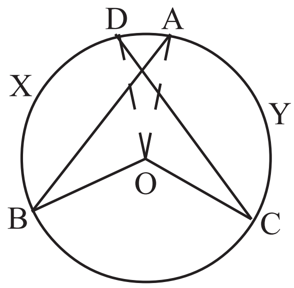
$\therefore \Delta OAB \cong \Delta OCD$ (ବାହୁ - ବାହୁ - ବାହୁ ସର୍ବସମତା)

$\Rightarrow m\angle AOB = m\angle COD$ ....(1)

$\Rightarrow \widehat{AXB} \cong \widehat{CYD}$ ((i) ପ୍ରମାଣିତ)

ପୁନଶ୍ଚ (1) ରୁ $360^0 - m\angle AOB = 360^0 - m\angle COD$

$\Rightarrow \widehat{AYB} \cong \widehat{CXD}$ ((ii) ପ୍ରମାଣିତ)



(ଚିତ୍ର 2.31)

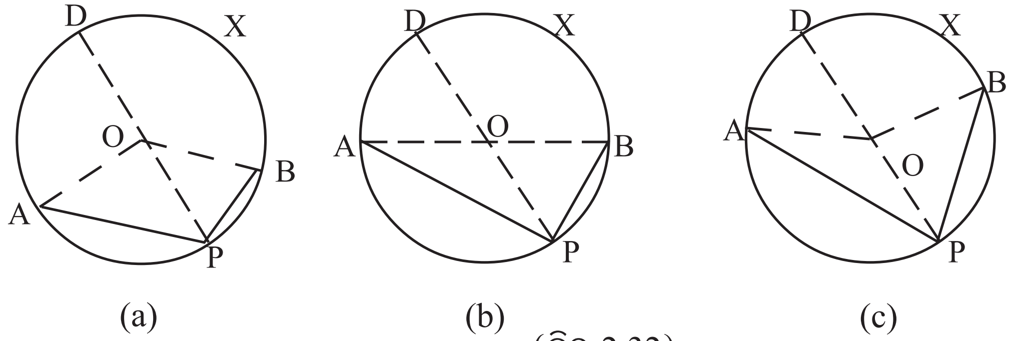
ମନ୍ତବ୍ୟ : ପ୍ରମେୟ - 2.5, ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ମଧ୍ୟ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ । ଏହାର କଥନ ଲେଖି ନିଜେ ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ଚେଷ୍ଟା କର ।

2.6. 2 ଗୋଟିଏ ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ସମ୍ପର୍କିତ ଏକ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ତଥ୍ୟ :

ପ୍ରମେୟ - 2.6 : ଏକ ବୃତ୍ତରେ କୌଣସି ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣର ପରିମାଣ ଏହାର ବିପରୀତ ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପର ଅର୍ଦ୍ଧେକ ।

[In a circle, the measure of an inscribed angle of an arc is half the degree measure of the opposite arc.]

ଦତ୍ତ : APB ବୃତ୍ତରେ O କେନ୍ଦ୍ର । ∠APB, $\overset{\frown}{APB}$ ର ଏକ ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ । $\overset{\frown}{AXB}$, $\overset{\frown}{APB}$ ର ବିପରୀତ ଚାପ (ଚିତ୍ର 2.32) ।



(ଚିତ୍ର 2.32)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $m\angle APB = \frac{1}{2} m\, \overset{\frown}{AXB}$

ଅଙ୍କନ : $\overrightarrow{PO}$ ବୃତ୍ତକୁ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ । $\overline{AO}$, $\overline{BO}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : ଏଠାରେ ତିନିଗୋଟି ସମ୍ଭାବନା ଅଛି । ସମ୍ଭାବନାତ୍ରୟ ହେଲେ -

(i) $\overset{\frown}{APB}$ ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ (ଚିତ୍ର 2.32 (a)),

(ii) $\overset{\frown}{APB}$ ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ (ଚିତ୍ର 2.32 (b)) ଏବଂ

(iii) $\overset{\frown}{APB}$ ଏକ ବୃହତ୍ ଚାପ (ଚିତ୍ର 2.32 (c))

ବର୍ତ୍ତମାନ ଚିତ୍ର 2.32 (a), (b) ଓ (c) ନିମନ୍ତେ Δ OAP ରେ

AO = PO (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ) $\Rightarrow m\angle OAP = m\angle OPA$ ... (1)

∠AOD ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ $\Rightarrow m\angle AOD = m\angle OAP + m\angle OPA$ (ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଦୂରବର୍ତ୍ତୀ)

$\Rightarrow m\angle AOD = 2m\angle OPA$ ((1) ଦ୍ୱାରା) .....(2)

ସେହିପରି ΔOPB ରୁ ପାଇବା $m\angle BOD = 2m\angle OPB$ ..... (3)

(2) ଓ (3)ରୁ ଆମେ ପାଇବା $m\angle AOD + m\angle BOD = 2m\angle OPA + 2m\angle OPB$

$\Rightarrow m\angle AOD + m\angle BOD = 2m\angle APB$ ..... (4)

ବର୍ତ୍ତମାନ ଚିତ୍ର (c) ରେ

$2m\angle APB = m\angle AOD + m\angle BOD = m\angle AOB$ [(4) - ଦ୍ୱାରା]

$\Rightarrow m\angle APB = \frac{1}{2} m\angle AOB = \frac{1}{2} m\, \overset{\frown}{AXB}$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ପୁନଶ୍ଚ ଚିତ୍ର (b)ରେ

$2m\angle APB = m\angle AOD + m\angle BOD$ [(4) - ଦ୍ୱାରା]

$= 180^0$ ($\overset{\frown}{APB}$ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ ହେତୁ $\overline{AB}$ ବ୍ୟାସ)

$\Rightarrow m\angle APB = \frac{180^0}{2} = \frac{1}{2} m\,\widehat{AXB}$ ($\because$ $\widehat{AXB}$ ମଧ୍ୟ ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ) (ପ୍ରମାଣିତ)

ଶେଷରେ ଚିତ୍ର (a)ରେ $m\angle AOD = 180^0 - m\angle AOP$ ....(5)

($\because$ $\angle AOD$ ଓ $\angle AOP$ ପରସ୍ପର ସନ୍ନିହିତ ପରିପୂରକ)

ସେହିପରି $m\angle BOD = 180^0 - m\angle BOP$ ....(6)

ସୁତରାଂ $2m\angle APB = m\angle AOD + m\angle BOD$ [(4) - ଦ୍ୱାରା]

$= 360^0 - (m\angle AOP + m\angle BOP)$ [(5) ଓ (6) ଦ୍ୱାରା]

$= 360^0 - m\angle AOB$

[$\angle AOP$ ଓ $\angle BOP$ ଦ୍ୱୟ ସନ୍ନିହିତ ଏବଂ P, $\angle AOB$ ର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ଅବସ୍ଥିତ]

$= m\,\widehat{AXB} \Rightarrow m\angle APB = \frac{1}{2} m\,\widehat{AXB}$ [ପ୍ରମାଣିତ]

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, ଚିତ୍ର 2.32 (a)ରେ $\widehat{AXB}$ ର ବିପରୀତ ଚାପ $\widehat{APB}$ ର P ଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣ $\angle APB$ର ପରିମାଣ, $\widehat{AXB}$ ର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପର ଅର୍ଦ୍ଧେକ ।

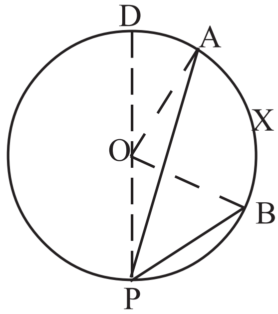
ମନ୍ତବ୍ୟ : $\widehat{APB}$ ବୃହତ୍ ଚାପ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ଚିତ୍ର 2.32 (c) ରେ O ବିନ୍ଦୁଟି $\angle APB$ର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ରହିଅଛି । ଯଦି ବିନ୍ଦୁଟି $\angle APB$ ର ବହିର୍ଦେଶରେ ରହେ (ଚିତ୍ର 2.33) ତେବେ ପ୍ରମାଣରେ ସାମାନ୍ୟ ପରିବର୍ତ୍ତନ ହେବ ।

ଚିତ୍ର 2.33ରେ

$2m\angle APB = 2\,(m\angle OPB - m\angle OPA)$

$= m\angle BOD - m\angle AOD$ [(2) ଓ (3) ଦ୍ୱାରା]

$= m\angle BOA = m\,\widehat{AXB}$ [$\because$ $\widehat{AXB}$ ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ର ଚାପ]

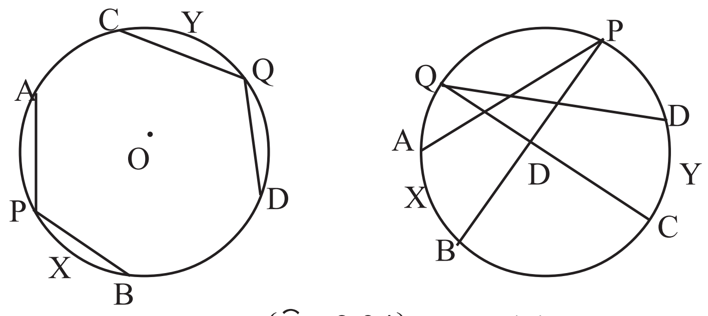


(ଚିତ୍ର 2.33)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 :

(i) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ । ବିପରୀତ କ୍ରମେ, ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଦୁଇଟି ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହେଲେ ଚାପଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ । [ଚିତ୍ର 2.34 (a)]

(ii) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଚାପର ବିପରୀତ ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ । ବିପରୀତ କ୍ରମେ, ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଦୁଇଟି ଚାପର ବିପରୀତ ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହେଲେ ଚାପଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ । [ଚିତ୍ର 2.34 (b)]



(a) (ଚିତ୍ର 2.34) (b)

ପ୍ରମାଣ : (i) ଚିତ୍ର 2.34 (a) ନିମନ୍ତେ :

ଦତ୍ତ : $\overset{\frown}{AXB} \cong \overset{\frown}{CYD}$ । $\angle APB$ ଓ $\angle CQD$ ସେମାନଙ୍କର ଦୁଇଟି ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\angle APB \cong \angle CQD$

ପ୍ରମାଣ : $\overset{\frown}{AXB} \cong \overset{\frown}{CYD} \Rightarrow \overset{\frown}{AYB} \cong \overset{\frown}{CXD}$ (ବିପରୀତ ଚାପ)

$\Rightarrow m\,\overset{\frown}{AYB} = m\,\overset{\frown}{CXD}$ (ସଂଜ୍ଞା) ...... (1)

ବର୍ତ୍ତମାନ $m\angle APB = \frac{1}{2} m\,\overset{\frown}{AYB}$ ଏବଂ $m\angle CQD = \frac{1}{2} m\,\overset{\frown}{CXD}$ (ପ୍ରମେୟ - 2.6 ଅନୁଯାୟୀ)

ସୁତରାଂ (1) $\Rightarrow \angle APB \cong \angle CQD$

ବିପରୀତ କ୍ରମେ $\angle APB \cong \angle CQD \Rightarrow m\angle APB = m\angle CQD$

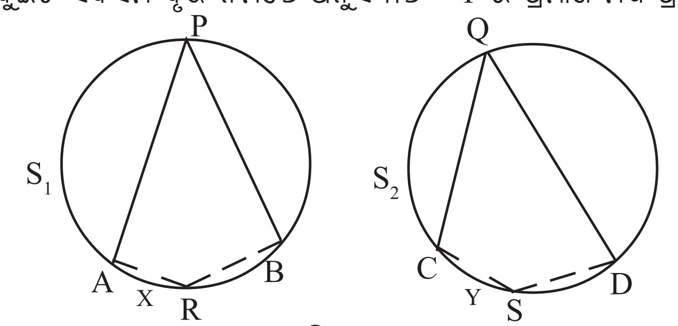
$\Rightarrow \frac{1}{2} m\,\overset{\frown}{AYB} = \frac{1}{2} m\,\overset{\frown}{CXD}$ (ପ୍ରମେୟ - 2.6 ଅନୁଯାୟୀ)

$\Rightarrow \overset{\frown}{AYB} \cong \overset{\frown}{CXD}$ (ସଂଜ୍ଞା) $\Rightarrow \overset{\frown}{AXB} \cong \overset{\frown}{CYD}$ (ବିପରୀତ ଚାପ) (ପ୍ରମାଣିତ)

(ii) ଚିତ୍ର 2.34 (b) ନିମନ୍ତେ ପ୍ରମାଣ ନିଜେ କର ।

(**ସୂଚନା:**$\angle APB$ ଓ$\angle CQD$ ଯଥାକ୍ରମେ $\overset{\frown}{AXB}$ ଓ $\overset{\frown}{CYD}$ ର ବିପରୀତ ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ଅଟନ୍ତି ।)

ମନ୍ତବ୍ୟ : ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 ର ପ୍ରମାଣ ମଧ୍ୟ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ।



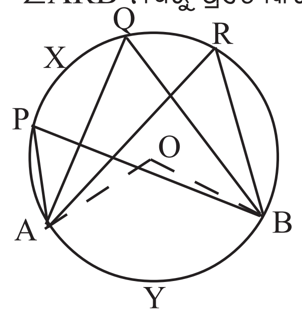
(a) (ଚିତ୍ର 2.35) (b)

ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ S_1 ଓ S_2 ରେ $\overset{\frown}{AXB} \cong \overset{\frown}{CYD}$ ଓ $\angle ARB$ ଏବଂ $\angle CSD$ ଯଥାକ୍ରମେ ସେମାନଙ୍କର ଦୁଇଟି ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ହେଲେ $\angle ARB \cong \angle CSD$ ହେବ । ସେହିପରି $\overset{\frown}{AXB}$ ଓ $\overset{\frown}{CYD}$ ର ବିପରୀତ ଚାପଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଦୁଇଟି କୋଣ $\angle APB$ ଏବଂ $\angle CQD$ ମଧ୍ୟ ସର୍ବସମ ହେବେ । ଏଥିପାଇଁ ପ୍ରମାଣ ନିଜେ କର ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 2: (i) **ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ କୌଣସି ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣଗୁଡ଼ିକ ସର୍ବସମ ।**

(ii) **ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ କୌଣସି ଚାପର ବିପରୀତ ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣଗୁଡ଼ିକ ସର୍ବସମ ।**

ଚିତ୍ର 2.36ରେ $\overset{\frown}{AXB}$ ର ତିନୋଟି ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ $\angle APB$, $\angle AQB$ ଏବଂ $\angle ARB$ ମଧ୍ୟରୁ ପ୍ରତ୍ୟେକର ପରିମାଣ ବିପରୀତ ଚାପ $\overset{\frown}{AYB}$ ର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପର ଅର୍ଦ୍ଧେକ (ପ୍ରମେୟ-2.6)।



(ଚିତ୍ର 2.36)

ସୁତରାଂ $m\angle APB = m\angle AQB = m\angle ARB = \frac{1}{2} m\,\overset{\frown}{AYB}$ ......(i)

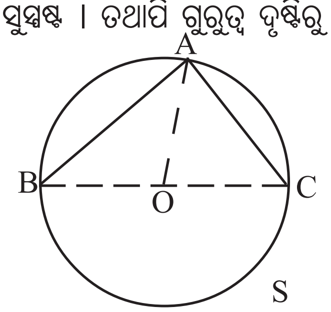
$\Rightarrow$ $\overset{\frown}{AYB}$ ର ବିପରୀତ ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣଗୁଡ଼ିକ ସର୍ବସମ ।

$\Rightarrow$ $\overset{\frown}{AXB}$ ର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣଗୁଡ଼ିକ ସର୍ବସମ ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 3 : ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ଏକ ସମକୋଣ ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 4 : କୌଣସି ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ଏକ ସମକୋଣ ହେଲେ ଚାପଟି ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ ।

ପ୍ରମେୟ- 2.6ର ପ୍ରମାଣ ଅନ୍ତର୍ଗତ ସମ୍ଭାବନା (ii) ଚିତ୍ର 2.32 (b) ରୁ ଏହା ସୁସ୍ପଷ୍ଟ । ତଥାପି ଗୁରୁତ୍ୱ ଦୃଷ୍ଟିରୁ ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 3 ଓ 4 ର ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ପ୍ରମାଣ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଛି ।



(ଚିତ୍ର 2.37)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 3 ର ପ୍ରମାଣ :

ଦତ୍ତ : S ବୃତ୍ତରେ BAC ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ । (ଚିତ୍ର 2.37)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\angle BAC$ ଏକ ସମକୋଣ ।

ଅଙ୍କନ : O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ହେଲେ $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ ଓ $\overline{OC}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : BAC ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ ହେତୁ $\overline{BC}$ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସ ।

ΔBAO ରେ $OB = OA$ (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ) $\Rightarrow m\angle OAB = m\angle OBA$

ସେହିପରି ΔCAO ରେ $m\angle OAC = m\angle OCA$

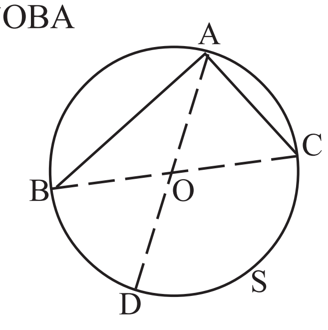
ସୁତରାଂ $m\angle OAB + m\angle OAC = m\angle OBA + m\angle OCA$

$\Rightarrow m\angle BAC = m\angle OBA + m\angle OCA$

$\Rightarrow 2m\angle BAC = m\angle BAC + m\angle OBA + m\angle OCA = 180^0$

[ΔABC ର କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି 180^0]

$\Rightarrow m\angle BAC = 90^0$ ଅର୍ଥାତ୍ $\angle BAC$ ଏକ ସମକୋଣ । (ପ୍ରମାଣିତ)



(ଚିତ୍ର 2.38)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 4ର ପ୍ରମାଣ :

ଦତ୍ତ: S ବୃତ୍ତରେ $\angle BAC$, $\overset{\frown}{BAC}$ ର ଏକ ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ଏବଂ $\angle BAC$ ଏକ ସମକୋଣ (ଚିତ୍ର 2.38)।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\overset{\frown}{BAC}$ ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ ।

ଅଙ୍କନ : O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ହେଲେ $\overline{AO}$, $\overline{BO}$ ଏବଂ $\overline{CO}$ ଅଙ୍କନ କର । $\overrightarrow{AO}$ ବୃତ୍ତକୁ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ ।

ପ୍ରମାଣ : Δ ABO ରେ OB = OA (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)

$\Rightarrow m\angle OBA = m\angle OAB$ ....(i)

$\angle BOD$, Δ ABO ର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ ।

$\therefore m\angle BOD = m\angle OBA + m\angle OAB = 2m\angle OAB$ [(i)ଦ୍ୱାରା]

ସେହିପରି ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇପାରେ ଯେ, $m\angle COD = 2m\angle OAC$

$\therefore m\angle BOD + m\angle COD = 2m\angle OAB + 2m\angle OAC = 2m\angle BAC = 180^0$

[$\because m\angle BAC = 90^0$ (ଦତ୍ତ)]

$\Rightarrow \overrightarrow{OB}$ ଓ $\overrightarrow{OC}$ ପରସ୍ପର ବିପରୀତ ରଶ୍ମି । ଅର୍ଥାତ B, O, C ଏକ ରେଖୀୟ ।

O କେନ୍ଦ୍ର ହେତୁ $\overline{BC}$ ଏକ ବ୍ୟାସ $\Rightarrow \widehat{BAC}$ ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ । (ପ୍ରମାଣିତ)

2.7 ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡ, ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡସ୍ଥ କୋଣ ଏବଂ ବୃତ୍ତକଳା

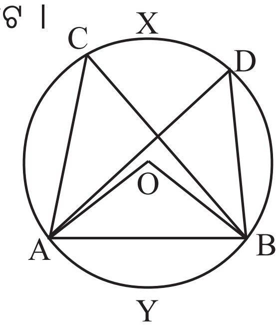
(Segment, angle inscribed in a segment and sector) :

2.7.1 ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡ :

ବୃତ୍ତର ଏକ ଜ୍ୟା ଏବଂ ଜ୍ୟା ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ କୌଣସି ଏକ ଚାପର ସଂଯୋଗରେ ଉତ୍ପନ୍ନ ସେଟ୍‌କୁ ଏକ ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡ କୁହାଯାଏ । ଚିତ୍ର 2.39ରେ $\overline{AB}$ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଏକ ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡ ହେଉଛି AXBA। $\widehat{AXB}$ ଏକ ବୃହତ୍ ଚାପ ହୋଇଥିବା ଯୋଗୁଁ **AXBA ଏକ ବୃହତ୍ ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡ (Major Segment)।** ସେହିପରି ଅନୁରୂପ କାରଣରୁ **AYBA ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ର ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡ (Minor Segment)।**

2.7.2 ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡସ୍ଥ କୋଣ :

କୌଣସି ଚାପର ଏକ ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣକୁ ସମ୍ପୃକ୍ତ ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡସ୍ଥ କୋଣ (Angle inscribed in a segment) କୁହାଯାଏ । ଚିତ୍ର 2.39ରେ $\angle ACB$, AXBA ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡସ୍ଥ କୋଣ ଅଟେ ।



(ଚିତ୍ର 2.39)

ସେହିପରି $\angle ADB$, AXBA ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡସ୍ଥ ଅନ୍ୟ ଏକ କୋଣ ଅଟେ ।

ପ୍ରମେୟ -2.6 ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ -2 ର ନିମ୍ନ ବିକଳ୍ପ କଥନଟି ସୁସ୍ପଷ୍ଟ :

କୌଣସି ଏକ ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡସ୍ଥ ସମସ୍ତ କୋଣ ସର୍ବସମ ।

ଚିତ୍ର 2.39 ରେ $m\angle ACB = m\angle ADB$ ।

ସେହିପରି ପ୍ରମେୟ - 2.6, ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 3 ର ବିକଳ୍ପ କଥନଟି ମଧ୍ୟ ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ।

ଅର୍ଦ୍ଧ ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡସ୍ଥ କୋଣ ଏକ ସମକୋଣ ।

2.7.3 ବୃତ୍ତକଳା :

ବୃତ୍ତର କୌଣସି ଏକ ଚାପ, ଚାପର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁକୁ କେନ୍ଦ୍ର ସହିତ ଯୋଗ କରୁଥିବା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଗରେ ବୃତ୍ତକଳା (Sector) ଗଠିତ ହୁଏ । ଚିତ୍ର 2.39 ରେ OAYB ଏକ ବୃତ୍ତକଳା ଅଟେ ।

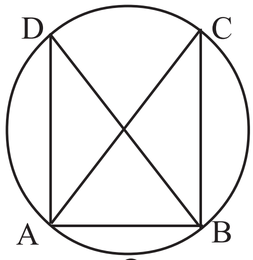
ପରିମିତିରେ ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡ ଓ ବୃତ୍ତକଳା ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଶଦ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି ।

2.8 ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ (Cyclic quadrilateral) :

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ନ ଥିବା ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଦତ୍ତ ଥିଲେ ଉକ୍ତ ବିନ୍ଦୁମାନେ ସର୍ବଦା ଏକ ବୃତ୍ତ ଉପରେ ରହିବେ । ଅର୍ଥାତ୍ ସେହି ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ସର୍ବଦା ଏକ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ ସମ୍ଭବ । କିନ୍ତୁ ଚାରିଟି ବିନ୍ଦୁ ଦତ୍ତ ଥିଲେ ସେମାନେ ସର୍ବଦା ଗୋଟାଏ ବୃତ୍ତ ଉପରେ ରହିବେ କି ? ଏହା ସର୍ବଦା ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ । ନିମ୍ନରେ ଆଲୋଚିତ ସର୍ତ୍ତ ପୂରଣ କରୁଥିଲେ ଚାରିଟି ବିନ୍ଦୁ ଏକ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ **(Concyclic)** ହେବେ ।

ପ୍ରମେୟ - 2.7 : ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡ ତାର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅନ୍ୟ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କରୁଥିବା କୋଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହେଲେ ବିନ୍ଦୁ ଚାରିଟି ଏକ ବୃତ୍ତ ଉପରେ ରହିବେ ।

[If the angles subtended by a line segment joining two points at two other points lying on the same side of the segment are congruent, then the four points lie on a circle.]



(ଚିତ୍ର 2.40)

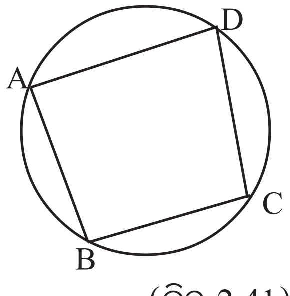
ଦତ୍ତ : A ଓ B ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡ $\overline{AB}$ ଏହାର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିବା C ଓ D ବିନ୍ଦୁଠାରେ $\angle ACB$ ଓ $\angle ADB$ ଉତ୍ପନ୍ନ କରୁଅଛି ଏବଂ $\angle ACB \cong \angle ADB$ (ଚିତ୍ର 2.40) ।

ସିଦ୍ଧାନ୍ତ : A, B, C ଓ D ବିନ୍ଦୁ ଚାରିଟି ଏକ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ହେବେ ।

ଏହାର ପ୍ରମାଣ ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ବହିର୍ଭୁକ୍ତ ଥିବାରୁ ଏଠାରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇ ନାହିଁ । ଆଗ୍ରହୀ ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀଙ୍କ ନିମନ୍ତେ ଏହି ଅଧ୍ୟାୟର ପରିଶିଷ୍ଟରେ ପ୍ରମେୟ 2.7 ର ପ୍ରମାଣ ଦିଆଯାଇଛି ।

ଏକ ବୃତ୍ତ ଉପରେ ଥିବା ଚାରିଗୋଟି ବିନ୍ଦୁ A, B, C ଓ D ଏକ ଚତୁର୍ଭୁଜ ABCD ଗଠନ କରୁଥିଲେ ଅର୍ଥାତ୍ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ ଓ $\overline{DA}$ ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସି ଦୁଇଟି ପରସ୍ପରକୁ ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟତ୍ର ଛେଦ କରୁ ନ ଥିଲେ ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜକୁ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ କହିବା ।

ସଂଜ୍ଞା : ଏକ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ଗୁଡ଼ିକ ଏକ ବୃତ୍ତ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେଉଥିଲେ ଚତୁର୍ଭୁଜଟିକୁ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ (Cyclic Quadrilateral) କୁହାଯାଏ ।



(ଚିତ୍ର 2.41)

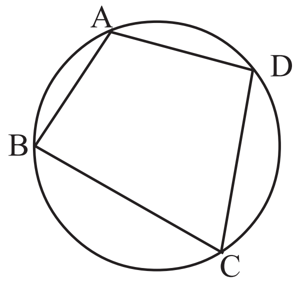
ଚିତ୍ର 2.41ରେ ABCD ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ ।

ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜର କୋଣମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସମ୍ବନ୍ଧ ଉପପାଦ୍ୟ- 11 ରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 11

ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜର ବିପରୀତ କୋଣମାନ ପରସ୍ପର ପରିପୂରକ ।

[The opposite angles of a cyclic quadrilateral are supplementary.]



(ଚିତ୍ର 2.42)

ଦତ୍ତ : ABCD ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ (ଚିତ୍ର 2.42)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $m\angle A + m\angle C = 180^0$ ଏବଂ $m\angle B + m\angle D = 180^0$

ପ୍ରମାଣ : ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜରେ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରନ୍ତି (ପ୍ରମାଣ ନିମନ୍ତେ ମନ୍ତବ୍ୟ ଦେଖ) ।

$\therefore$ B ଓ D ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟ $\overline{AC}$ ର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

$\Rightarrow \widehat{ABC}$ ଓ $\widehat{ADC}$ ଦୁଇଟି ବିପରୀତ ଚାପ ।

ତେଣୁ ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପର ସଂଜ୍ଞାନୁସାରେ

$m\widehat{ABC} + m\widehat{ADC} = 360^0 \Rightarrow \frac{1}{2}m\widehat{ABC} + \frac{1}{2}m\widehat{ADC} = 180^0$ .... (1)

କିନ୍ତୁ $m\angle ADC = \frac{1}{2}m\widehat{ABC}$ ଏବଂ $m\angle ABC = \frac{1}{2}m\widehat{ADC}$ (ପ୍ରମେୟ - 2.6)

$\Rightarrow m\angle ADC + m\angle ABC = \frac{1}{2}m\widehat{ABC} + \frac{1}{2}m\widehat{ADC} = 180^0$ ((1) ଦ୍ୱାରା)

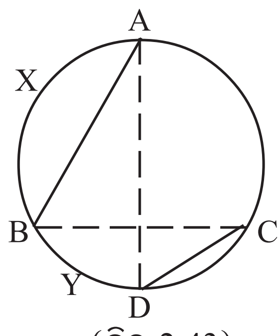
କିନ୍ତୁ ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ ଏକ ଚତୁର୍ଭୁଜରେ $m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D = 360^0$

ସୁତରାଂ $m\angle BAD + m\angle BCD = 180^0$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ମନ୍ତବ୍ୟ : ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ହେଲେ ଏହାର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରନ୍ତି ।

ପ୍ରମାଣ : ଯଦି $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ ନ କରନ୍ତି (ଚିତ୍ର 2.43 ଦେଖ) ତେବେ B ଓ D $\overline{AC}$ ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ରହିବେ । ଅର୍ଥାତ୍ D, $\widehat{ABC}$ ଉପରେ ରହିବ । ମନେକର D, $\widehat{BYC}$ ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ । A, $\widehat{ABC}$ ର ଏକ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ହୋଇଥିବାରୁ $\widehat{BYC}$ ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ହେବ ନାହିଁ ।

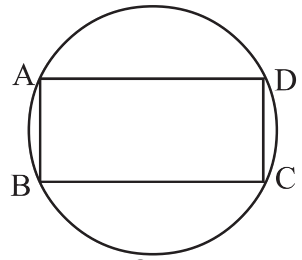
$\Rightarrow$ A ଓ D, $\overline{BC}$ ର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ହେବେ ।



(ଚିତ୍ର 2.43)

$\Rightarrow \overline{AD}$ ଓ $\overline{BC}$ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରିବେ, ଯାହାକି ଚତୁର୍ଭୁଜର ସଂଜ୍ଞାନୁଯାୟୀ ଅସମ୍ଭବ । ତେଣୁ D, $\widehat{BYC}$ ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ହେବ ନାହିଁ । ସେହିପରି D, $\widehat{AXB}$ ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ହେବ ନାହିଁ । ସୁତରାଂ D, $\widehat{ABC}$ ଉପରେ ରହି ପାରିବ ନାହିଁ । ତେଣୁ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରିବେ । (ପ୍ରମାଣିତ) ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 : ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ଏକ ଆୟତଚିତ୍ର ।



(ଚିତ୍ର 2.44)

ପ୍ରମାଣ : ABCD ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର (ଚିତ୍ର 2.44)

$\Rightarrow m\angle A = m\angle C$ (ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ସମ୍ମୁଖୀନ କୋଣମାନେ ସର୍ବସମ)

କିନ୍ତୁ $m\angle A + m\angle C = 180^0$ (ଉପପାଦ୍ୟ - 11)

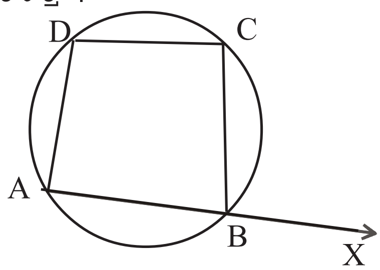
$\Rightarrow 2m\angle A = 180^0 \Rightarrow m\angle A = 90^0$

ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ଗୋଟିଏ କୋଣ ସମକୋଣ । $\therefore$ ABCD ଏକ ଆୟତଚିତ୍ର ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 2 : ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ରମ୍ବସ ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ର ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 ଅନୁଯାୟୀ ରମ୍ବସର ଗୋଟିଏ କୋଣ ଏକ ସମକୋଣ ହେବ ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 3: ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ ଏହାର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିପରୀତ କୋଣର ପରିମାଣ ସହ ସମାନ ।



(ଚିତ୍ର 2.45)

ଚିତ୍ର 2.45 ରେ ABCD ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜର $\angle CBX$ ଏକ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ

$\Rightarrow m\angle ABC + m\angle CBX = 180^0$

କିନ୍ତୁ $m\angle ABC + m\angle ADC = 180^0$ (ଉପପାଦ୍ୟ - 11) $\Rightarrow m\angle CBX = m\angle ADC$

ପ୍ରମେୟ - 2.8 : (ଉପପାଦ୍ୟ - 11ର ବିପରୀତ କଥନ) :

ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର ବିପରୀତ କୋଣମାନ ପରସ୍ପର ପରିପୂରକ ହେଲେ ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ହେବ ।

[If the opposite angles of a quadrilateral are supplementary, then the quadrilateral is cyclic.]

ଦତ୍ତ : ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜରେ $m\angle A + m\angle C = 180^0$ ଏବଂ $m\angle B + m\angle D = 180^0$ (ଚିତ୍ର 2.41)

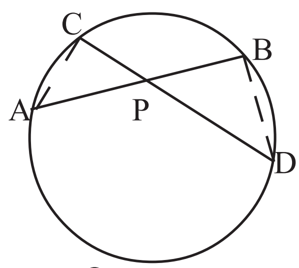
ସିଦ୍ଧାନ୍ତ : ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ।

ପ୍ରମେୟ -2.8 ର ପ୍ରମାଣ ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ବହିର୍ଭୂତ ଥିବାରୁ ଆଗ୍ରହୀ ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀଙ୍କ ନିମନ୍ତେ ଏହି ଅଧ୍ୟାୟର ପରିଶିଷ୍ଟରେ ଉକ୍ତ ପ୍ରମେୟର ପ୍ରମାଣ ଦିଆଯାଇଛି ।

ବୃତ୍ତ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତେଗୋଟି ଉଦାହରଣ :

ଉଦାହରଣ : - 1 ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ପରସ୍ପରକୁ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ AP . PB = CP. PD ।

ସମାଧାନ : ଚିତ୍ର 2.46 ରେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ P ଠାରେ ଛେଦ କରୁଛନ୍ତି । ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ହେବ ଯେ PA . PB = PC .PD



(ଚିତ୍ର 2.46)

ଅଙ୍କନ : $\overline{CA}$ ଓ $\overline{BD}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : Δ PAC ଓ Δ PBD ମଧ୍ୟରେ

$m\angle ACP = m\angle PBD$ (ଏକା ଚାପ $\overset{\frown}{ABD}$ ର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ);

$m\angle PAC = m\angle PDB$ (ଏକା ଚାପ $\overset{\frown}{BC}$ ର ବିପରୀତ ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ) ଏବଂ

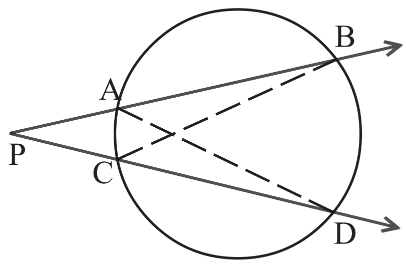
$m\angle APC = m\angle BPD$ (ପ୍ରତୀପ କୋଣ)

$\Rightarrow \Delta PAC \sim \Delta PBD$ (କୋ-କୋ-କୋ ସାଦୃଶ୍ୟ)

$\Rightarrow \frac{AP}{PD} = \frac{PC}{PB} \Rightarrow PA . PB = PC. PD$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ - 2 : ଏକ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଦୁଇଟି ଛେଦକ ବୃତ୍ତକୁ ଯଥାକ୍ରମେ A, B ଏବଂ C, D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି (ଚିତ୍ର 2.47) ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, PA . PB = PC. PD ।

ସମାଧାନ : ଚିତ୍ର 2.47ରେ P ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟ ଦେଇ ଦୁଇଟି ଛେଦକ $\overrightarrow{PB}$ ଓ $\overrightarrow{PD}$ ବୃତ୍ତକୁ ଯଥାକ୍ରମେ A, B ଏବଂ C, D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଛନ୍ତି ।



(ଚିତ୍ର 2.47)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ହେବ ଯେ PA . PB = PC. PD ।

ଅଙ୍କନ : $\overline{BC}$ ଓ $\overline{AD}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରାମାଣ : ΔPAD ଓ ΔPCB ମଧ୍ୟରେ $\angle APC$ ସାଧାରଣ ।

$m\angle ADP = m\angle CBP$ (ଏକା ଚାପ $\overset{\frown}{AC}$ ର ବିପରୀତ ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ)

$\Rightarrow \Delta ADP \sim \Delta PCB$ (କୋ-କୋ ସାଦୃଶ୍ୟ)

$\Rightarrow \frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} \Rightarrow PA . PB = PC. PD$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ - 3 : ଏକ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଦୁଇଟି ଛେଦକ ବୃତ୍ତକୁ ଯଥାକ୍ରମେ A, B ଏବଂ C, D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $m\angle APC = \frac{1}{2}[m\overset{\frown}{BD} - m\overset{\frown}{AC}]$

ସମାଧାନ : ଚିତ୍ର 2.47 ରେ P ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଦୁଇଟି ଛେଦକ $\overrightarrow{PB}$ ଓ $\overrightarrow{PD}$ ବୃତ୍ତକୁ A, B ଏବଂ C, D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଛନ୍ତି । ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ହେବ ଯେ $m\angle APC = \frac{1}{2}[m\overset{\frown}{BD} - m\overset{\frown}{AC}]$

ଅଙ୍କନ : $\overline{AD}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : ΔPAD ରେ $m\angle APD = m\angle BAD - m\angle ADP$ ($\because \angle BAD$ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ) ....(1)

କିନ୍ତୁ $m\angle BAD = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{BD}$ ଏବଂ $m\angle ADP = m\angle ADC = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{AC}$

ସୁତରାଂ $m\angle APC = \frac{1}{2}[m\overset{\frown}{BD} - m\overset{\frown}{AC}]$ [(1) (ରୁ)] (ପ୍ରମାଣିତ)

ପରିଶିଷ୍ଟ

ଆଗ୍ରହୀ ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀଙ୍କ ପାଇଁ ପ୍ରମେୟ 2.7 ଓ 2.8 ର ପ୍ରମାଣ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

ପ୍ରମେୟ - 2.7ର ପ୍ରମାଣ :

ଦତ୍ତ : C ଓ D ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟ $\overline{AB}$ ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏବଂ $m\angle ACB = m\angle ADB$ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : A, B, C ଓ D ବିନ୍ଦୁ ଚାରିଟି ଏକ ବୃତ୍ତ ଉପରେ ରହିବେ ।

ଅଙ୍କନ : ଯେହେତୁ A, B ଓ C ଏକ ସରଳରେଖାରେ ନାହାନ୍ତି, ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟ ଦେଇ ABC ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କିତ ହେଉ ।

ପ୍ରମାଣ : ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ଦର୍ଶାଇବା ଯେ D ବିନ୍ଦୁଟି ABC ବୃତ୍ତ ଉପରେ ରହିବ ।

ମନେକର D ବିନ୍ଦୁ ବୃତ୍ତର ବହିର୍ଦ୍ଦେଶରେ ରହିବ (ଚିତ୍ର 2.48) ତେବେ $\overleftrightarrow{BD}$ କିମ୍ବା $\overleftrightarrow{AD}$ ବୃତ୍ତକୁ ଏକ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ । (ସମତଳ ଉପରେ $\overline{AB}$ ର C ପାର୍ଶ୍ୱରେ Dର ବିଭିନ୍ନ ଅବସ୍ଥିତି ନେଇ ଏହା ପ୍ରମାଣ କରିହେବ ।)

ମନେକର $\overleftrightarrow{BD}$ ବୃତ୍ତଟିକୁ E ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । $\overline{AE}$ ଅଙ୍କିତ ହେଉ ।

ଯେହେତୁ C ଓ E ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟ $\overset{\frown}{ACB}$ ଉପରେ ଅଛନ୍ତି ।

ପ୍ରମେୟ - 2.6 ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 2 ଦ୍ୱାରା

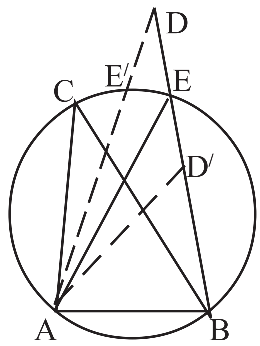
$m\angle ACB = m\angle AEB$ ....(1)

ΔADE ରେ $\angle AEB$ ବହିଃସ୍ଥ ।

ସୁତରାଂ $m\angle AEB \neq m\angle ADB$

କିନ୍ତୁ ଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ $m\angle ADB = m\angle ACB$

$\Rightarrow m\angle AEB \neq m\angle ACB$ ଯାହା (1)କୁ ବିରୋଧ କରୁଛି ।



(ଚିତ୍ର 2.48)

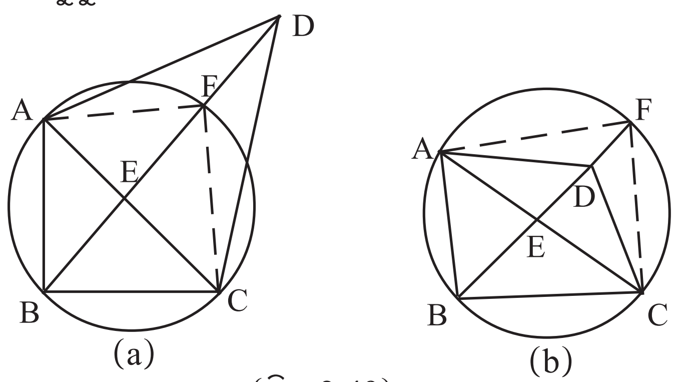
ସେହିପରି $\overleftrightarrow{AD}$ ବୃତ୍ତକୁ ଏକ ବିନ୍ଦୁରେ $E^{/}$ ଠାରେ ଛେଦ କଲେ $\overline{BE'}$ ଅଙ୍କନ କରି ପୂର୍ବ ପରି ଆମେ ଦୁଇଟି ପରସ୍ପର ବିରୋଧୀ ଉକ୍ତି ପାଇବା ।

ତେଣୁ D ବିନ୍ଦୁଟି ବୃତ୍ତର ବହିର୍ଦ୍ଦେଶରେ ରହିବ ନାହିଁ । ଯଦି D ବିନ୍ଦୁଟି ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦ୍ଦେଶରେ $D^{/}$ ଠାରେ ରହେ ତେବେ ଉପରୋକ୍ତ ଧାରାରେ ଆମେ ଦୁଇଟି ପରସ୍ପର ବିରୋଧୀ ଉକ୍ତି ପାଇବା । ତେଣୁ D ବିନ୍ଦୁ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦ୍ଦେଶରେ ରହିବ ନାହିଁ ।

ସୁତରାଂ D ବିନ୍ଦୁଟି ABC ବୃତ୍ତ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ । (ପ୍ରମାଣିତ)

ପ୍ରମେୟ - 2.8ର ପ୍ରମାଣ :

ଦତ୍ତ : ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜରେ $m\angle A + m\angle C = 180^0$ ଏବଂ $m\angle B + m\angle D = 180^0$ (ଚିତ୍ର 2.49)



(ଚିତ୍ର 2.49)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ।

ପ୍ରମାଣ : (ଅସମ୍ଭବାୟନ ପ୍ରଣାଳୀ) ମନେକର ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ନୁହେଁ । ତେବେ A,B ଓ C ମଧ୍ୟ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ବୃତ୍ତ ଉପରେ D ବିନ୍ଦୁ ଅବସ୍ଥିତ ହେବ ନାହିଁ । ସୁତରାଂ D, ABC ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ (ଚିତ୍ର 2.49)(a)) କିମ୍ବା ଅନ୍ତଃସ୍ଥ (ଚିତ୍ର 2.49) (b)) ହେବ । ଉଭୟ କ୍ଷେତ୍ରରେ $m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D$

$= (m\angle A + m\angle C) + (m\angle B + m\angle D) = 180^0 + 180^0 = 360^0$

$\therefore$ ABCD ଏକ ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜ । ଏହାର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ ପରସ୍ପରକୁ E ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତୁ । E ବିନ୍ଦୁ ABC ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ହେବ । ($\because$ E ବିନ୍ଦୁ $\overline{AC}$ ଜ୍ୟା ଉପରିସ୍ଥ) ସୁତରାଂ $\overrightarrow{BE}$ ABC ବୃତ୍ତକୁ ଏକ ବିନ୍ଦୁ F ରେ ଛେଦ କରିବ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଦୁଇଟି ସମ୍ଭାବନା ଯଥା : (i) E-F-D (ଚିତ୍ର 2.49(a) ଏବଂ (ii) E-D-F (ଚିତ୍ର 2.49) (b)) ମଧ୍ୟରୁ ସମ୍ଭାବନା (i) ର ପ୍ରମାଣ :

ଚିତ୍ର 2.49 (a) ରୁ $m\angle ADC = m\angle ADB + m\angle BDC$ ଏବଂ

$m\angle AFC = m\angle AFB + m\angle BFC$ ...(1)

ବର୍ତ୍ତମାନ ABCF ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜରେ $m\angle ABC + m\angle AFC = 180^0$

କିନ୍ତୁ $m\angle ABC + m\angle ADC = 180^0$ (ଦତ୍ତ)

$\therefore m\angle ABC + m\angle AFC = m\angle ABC + m\angle ADC$

$\Rightarrow m\angle AFC = m\angle ADC$ ... (2)

Δ ADF ରେ $\angle AFB$ ବହିସ୍ଥ $\Rightarrow m\angle AFB > m\angle ADF$

ସେହିପରି ΔCDF ରେ $m\angle CFB > m\angle CDF$

ସୁତରାଂ $m\angle AFB + m\angle CFB > m\angle ADF + m\angle CDF$

$\Rightarrow m\angle AFC > m\angle ADC$ ((1) ଦ୍ୱାରା) ...... (3)

(2) ଓ (3) ପରସ୍ପର ବିରୋଧୀ ଉକ୍ତି ।

ସୁତରାଂ ଆମେ ଗ୍ରହଣ କରିଥିବା ପ୍ରାରମ୍ଭିକ ଉକ୍ତିଟି ସତ୍ୟ ନୁହେଁ । ଅର୍ଥାତ୍ ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ହେବ । ସମ୍ଭାବନା (ii) କ୍ଷେତ୍ରରେ ଅନୁରୂପ ପ୍ରମାଣ ଚିତ୍ର 2.49(b) ସାହାଯ୍ୟରେ ଦିଆଯାଇ ପାରିବ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 2(b)

(କ - ବିଭାଗ)

1. ନିମ୍ନ ଉକ୍ତି ଗୁଡ଼ିକରେ ଠିକ୍ ଉକ୍ତି ପାଇଁ T ଓ ଭୁଲ ଉକ୍ତି ପାଇଁ F ଲେଖ ।

(i) ବୃତ୍ତର ଏକ ଉପସେଟ୍‌କୁ ଚାପ କହନ୍ତି ।

(ii) ଚାପର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ସମ୍ପୃକ୍ତ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ନୁହେଁ ।

(iii) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ P ଓ Q ଦୁଇଟି ଚାପର ସାଧାରଣ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ଚାପଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରର ପରିପୂରକ ଚାପ ଅଟନ୍ତି ।

(iv) ପ୍ରତ୍ୟେକ ଚାପର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟକୁ କେନ୍ଦ୍ର ସହିତ ଯୋଗ କଲେ ଯେଉଁ କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ ହୁଏ ତାହା ଉକ୍ତ ଚାପର କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ ଅଟେ ।

(v) ଦୁଇଟି ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପର ସମଷ୍ଟି 360^0 ରୁ ଅଧିକ ହୋଇ ପାରିବ ନାହିଁ ।

(vi) ବୃତ୍ତ ଏକ ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ ନୁହେଁ ।

(vii) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଦୁଇଟି ଚାପର ଗୋଟିଏ ସାଧାରଣ ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଥିଲେ ଚାପ ଦୁଇଟି ସନ୍ନିହିତ ଚାପ ହେବେ ।

(viii) ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଜ୍ୟା ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଚାପଦ୍ୱୟ ସନ୍ନିହିତ ଚାପ ହେଲେ ଚାପଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଗରେ ସର୍ବଦା ବୃହତ୍ ଚାପ ଗଠିତ ହେବ ।

(ix) ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଜ୍ୟା ପରସ୍ପରକୁ ଲମ୍ବ ଭାବରେ ବୃତ୍ତର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P ରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଠାରୁ ସେମାନଙ୍କ ପ୍ରତି $\overline{OQ}$, $\overline{OR}$ ଲମ୍ବ ଗଠନ କରାଯାଇଛି । ତେବେ O, Q, P ଓ R ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ରର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ହେବେ ।

(x) $\overset{\frown}{BPC}$ ର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ 30^0 । A ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ΔABC ରେ $\angle A$ ର ପରିମାଣ ସର୍ବଦା 15^0 ହେବ ।

(xi) ଗୋଟିଏ ଚାପ ଅସଂଖ୍ୟ ବିନ୍ଦୁର ସମାହାର ଅଟେ ।

(xii) ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ରମ୍ବସ୍ ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ର ।

2. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(i) ଏକ ବୃହତ୍ ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ ... ରୁ ବେଶୀ ।

(ii) ଗୋଟିଏ ସୁଷମ ଷଡ଼ଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁ ଏହାର ପରିବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କରୁଥିବା କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ .... ।

(iii) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜର ABCD ର $m\angle A = 50^0$ ଓ $m\angle B = 120^0$ ହେଲେ $m\angle C$ ଓ $m\angle D$ ମଧ୍ୟରେ ଅନ୍ତର .... ।

(iv) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଜ୍ୟା $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ପରସ୍ପରକୁ ବୃତ୍ତର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P ରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ B ଓ C $\overline{OP}$ ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିଲେ $\widehat{AD}$ ଓ .... ଦୁହେଁ ସର୍ବସମ ।

(v) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଏକ ଜ୍ୟାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ସହ ସମାନ ହେଲେ ଉକ୍ତ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଛେଦିତ କ୍ଷୁଦ୍ର ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ .... ।

(vi) $\overline{AB}$ ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ C ଓ D ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ । $m\angle ACB = m\angle ADB = 20^0$ । ΔACDର ପରିବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ହେଲେ $m\angle AOB$ = ... ।

(vii) $m\angle ABC = 90^0$ ହେଲେ ΔABC ର ପରିବୃତ୍ତରେ $\overline{AC}$ ଏକ .... ।

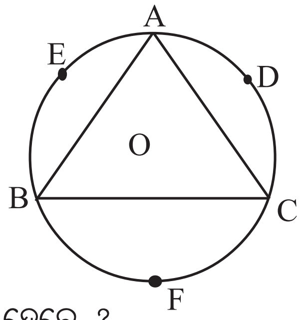
(viii) ABCD ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ । $m\angle BAD$ .... ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପର ଅର୍ଦ୍ଧେକ ।

(ix) ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ .... ।

(x) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଏକ ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ 90^0 ହେଲେ, ସଂପୃକ୍ତ ଜ୍ୟା ଓ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧର ଅନୁପାତ .... ।

(ଖ - ବିଭାଗ)

3. ଚିତ୍ର 2.50ରେ ΔABC ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଏବଂ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣୀ । D, E, F, ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ନିମ୍ନ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର ଦିଅ ।



(ଚିତ୍ର 2.50)

(i) $\angle B$ କେଉଁ ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ ?

(ii) $\angle B$ ଦ୍ୱାରା କେଉଁ ଚାପ ଛେଦିତ ?

(iii) $\overline{BC}$ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଛେଦିତ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ ଓ ବୃହତ୍ ଚାପ କିଏ ?

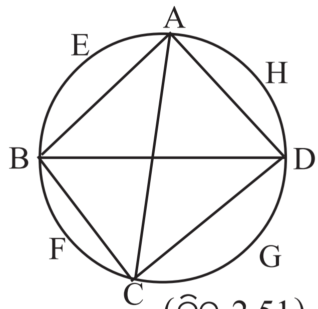
(iv) $\angle A$ ର ପରିମାଣ କେଉଁ କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ ପରିମାଣର ଅର୍ଦ୍ଧେକ ?

(v) ΔABC ରେ ଯଦି AB = BC ହୁଏ ତେବେ କେଉଁ ଚାପ ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହେବେ ?

(vi) ଦୁଇଟି ସନ୍ନିହିତ ଚାପର ନାମ ଲେଖ ଯେପରିକି ସେମାନଙ୍କ ସଂଯୋଗରେ $\widehat{BAD}$ ଗଠିତ ହେବ ।

(vii) $\widehat{BFC}$ ଉପରେ ଏପରି ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ନିଅ ଯେପରିକି $m\angle BPA = m\angle C$ । ଏପରି କେତୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଅଛି ? $\widehat{ADC}$ ଉପରେ ଏପରି କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ ଅଛି କି ? $\widehat{BEA}$ ଉପରେ ଏପରି କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ ଅଛି କି ?

4. ଚିତ୍ର 2.51 ରେ ABCD ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ ଯାହାର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । m $\widehat{AEB}$ = 100^0 ହେଲେ



(ଚିତ୍ର 2.51)

(i) ଚତୁର୍ଭୁଜର ସମସ୍ତ କୋଣ ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ii) $\widehat{AHD}$ ଓ $\widehat{BFC}$ ମଧ୍ୟରେ କି ସମ୍ପର୍କ ଦେଖୁଛ ?

(iii) ABCD କି ପ୍ରକାର ଚତୁର୍ଭୁଜ ?

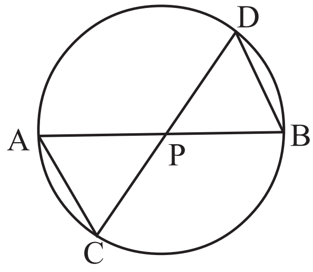
5. ଚିତ୍ର 2.52 ରେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ବୃତ୍ତର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରେ ଛେଦ କରନ୍ତି ।

$m\angle PBD = 80^0$, $m\angle CAP = 45^0$ ହେଲେ

(i) ΔBPD ର କୋଣ ପରିମାଣଗୁଡ଼ିକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ii) ΔAPC ର କୋଣ ପରିମାଣ ଗୁଡ଼ିକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iii) ΔAPC ଓ ΔDPB ମଧ୍ୟରେ କି ସମ୍ପର୍କ ଦେଖୁଛ ?



(ଚିତ୍ର 2.52)

6. ΔABC ରେ $\angle A$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ତ୍ରିଭୁଜର ପରିବୃତ୍ତକୁ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ΔBDC ସମଦ୍ୱିବାହୁ ।

7. ଚିତ୍ର 2.53 ରେ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ A ଠାରୁ $\overrightarrow{AP}$ ଓ $\overrightarrow{AR}$ ରଶ୍ମି ଦ୍ୱୟ ବୃତ୍ତକୁ ଯଥାକ୍ରମେ P, Q ଏବଂ R, S ଠାରେ ଛେଦ କରନ୍ତି ଯେପରି A-P-Q ଏବଂ A-R-S ।

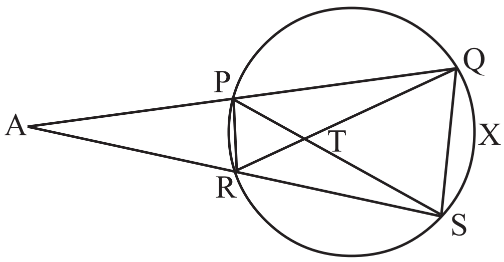
(a) ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\Delta APR \sim \Delta AQS$

(b) ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\Delta APS \sim \Delta ARQ$

(c) ଯଦି $\overline{PS}$ ଓ $\overline{QR}$ ର ଛେଦ ବିନ୍ଦୁ T ହୁଏ, ତେବେ

(i) ପ୍ରମାଣ କର ଯେ TP . TS = TR . TQ

(ii) ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $m\angle PTR = \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{QS} + m\overset{\frown}{PR})$



(ଚିତ୍ର 2.53)

(d) $m\angle PAR = 15^0$ ଏବଂ $m\overset{\frown}{QXS} = 50^0$ ହେଲେ $m\angle PTR$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

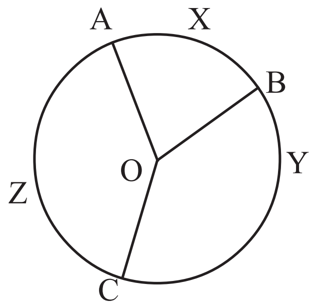
8. ଚିତ୍ର 2.54ରେ ABC ବୃତ୍ତର $\overset{\frown}{AXB}$ ଓ $\overset{\frown}{BYC}$ ଦୁଇଟି ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ ଯଥାକ୍ରମେ 80^0 ଓ 140^0

(i) $m\angle BAC$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ii) $m\overset{\frown}{ABC}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iii) $m\overset{\frown}{ACB}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iv) $\overset{\frown}{AZC}$ ଓ $\overset{\frown}{BYC}$ ମଧ୍ୟରେ କି ସମ୍ପର୍କ ଅଛି ?



(ଚିତ୍ର 2.54)

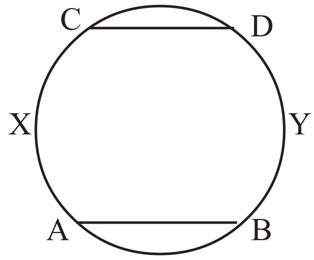
9. ଏକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ $\overline{AB}$ ଏକ ବ୍ୟାସ । ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ P ଓ Q ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟ $\overline{AB}$ ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ । ଯଦି A ଓ P ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ବିଶିଷ୍ଟ ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ 60^0 ଏବଂ B ଓ Q ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ବିଶିଷ୍ଟ ଚାପର

ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ 50^0 ହୁଏ ତେବେ -

(i) A ଓ Q ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ବିଶିଷ୍ଟ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ,

(ii) P ଓ B ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ବିଶିଷ୍ଟ ବୃହତ୍ ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ ଏବଂ

(iii) P ଓ Q ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ବିଶିଷ୍ଟ ବୃହତ୍ ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।



(ଚିତ୍ର 2.55)

10. $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ଜ୍ୟା (ଚିତ୍ର 2.55)

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ i) m $\overset{\frown}{AXC}$ = m $\overset{\frown}{BYD}$, (ii) AC = BD

11. ABCD ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ ।

(i) $\overline{AB}$ II $\overline{CD}$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, AD = BC ଏବଂ AC = BD

(ii) AD = BC ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, AC = BD ଏବଂ $\overline{AB}$ II $\overline{CD}$

12. (i) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ $\overset{\frown}{AXB}$ ଏକ ଚାପ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\overset{\frown}{AXB}$ ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଗୋଟିଏ ଏବଂ କେବଳ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ C ଅଛି ଯେପରି $\overset{\frown}{AC}$ ଓ $\overset{\frown}{BC}$ ଚାପଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହେବେ । (C ବିନ୍ଦୁକୁ $\overset{\frown}{AXB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ କୁହାଯାଏ)

(ସୂଚନା : ∠AOBର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ରେଖା $\overset{\frown}{AXB}$ କୁ C ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କଲେ C ଆବଶ୍ୟକ ବିନ୍ଦୁ ହେବ)

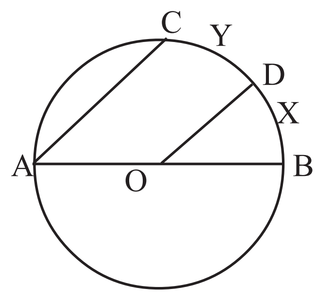
(ii) ଚାପର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଧାରଣାକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\overset{\frown}{AXB}$ ରେ ଅସଂଖ୍ୟ ବିନ୍ଦୁ ଅଛି ।

13. ଚିତ୍ର 2.56 ରେ $\overline{AB}$ ବୃତ୍ତର ଏକ ବ୍ୟାସ ଏବଂ O କେନ୍ଦ୍ର ।

$\overline{OD}$ ଯେକୌଣସି ଏକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ । $\overline{AC}$II $\overline{OD}$ ହେଲେ,

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\overset{\frown}{BXD}$ ଓ $\overset{\frown}{DYC}$ ସର୍ବସମ ଅର୍ଥାତ୍ D, $\overset{\frown}{BDC}$ ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ।

(ସୂଚନା : $\overline{OC}$ ଅଙ୍କନ କରି ଦର୍ଶାଅ ଯେ, m∠BOD = m∠DOC)

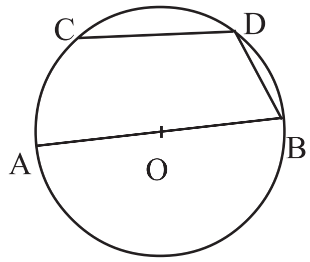


(ଚିତ୍ର 2.56)

ଗ - ବିଭାଗ

14. ଚିତ୍ର 2.57ରେ $\overline{CD}$ ଜ୍ୟା $\overline{AB}$ ବ୍ୟାସ ସହ ସମାନ୍ତର

ଏବଂ CD = OB । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ m∠BDC = 2m∠OBD ।



(ଚିତ୍ର 2.57)

15. ABCD ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜର $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ P ଠାରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ B ଓ C, $\overleftrightarrow{OP}$ ର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ । ଯଦି AC = BD ହୁଏ, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

(i) AB = CD, (ii) PA = PD ଏବଂ (iii) $\overline{BC}$II $\overline{AD}$ ।

16. (i) ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ର ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ଏକ ସ୍ଥୂଳକୋଣ ।

(ii) ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଏକ ବୃହତ୍ ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ଏକ ସୂକ୍ଷ୍ମ କୋଣ ।

[ସୂଚନା : (i) $\widehat{APB}$ ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ର ଚାପ ଓ $\widehat{AQB}$ ଏକ ବୃହତ୍ ଚାପ ହେଉ । $\overline{AD}$ ବ୍ୟାସ ଅଙ୍କନ କର ।

$m\angle APD = 90^0 < m\angle APB$]

17. (i) Δ ABC ର ପରିବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ତ୍ରିଭୁଜଟିର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

$m\angle BAC + m\angle OBC = 90^0$ ।

(ii) ΔABC ର ପରିବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ତ୍ରିଭୁଜଟିର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ । O ଏବଂ A, $\overline{BC}$ ର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $m\angle BAC - m\angle OBC = 90^0$ ।

18. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଏକ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର ଅସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହେଲେ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ଟି ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ହେବ ।

19. ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ ପରସ୍ପରକୁ P ଓ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । P ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟ ଦେଇ ଏକ ସରଳରେଖା ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟକୁ K ଓ L ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । ସେହିପରି Q ମଧ୍ୟ ଦେଇ ଏକ ସରଳରେଖା ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟକୁ M ଓ N ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । K ଓ M $\overline{PQ}$ ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\overline{KM} \parallel \overline{LN}$ ।

20. ABCD ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜରେ $\angle B$ ଓ $\angle D$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ E ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । $\overleftrightarrow{DE}$ ବୃତ୍ତକୁ F ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\overline{BE} \perp \overline{BF}$ ।

21. ΔABC ର କୋଣମାନଙ୍କର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକମାନେ ତ୍ରିଭୁଜର ପରିବୃତ୍ତକୁ X, Y, ଓ Z ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ΔXYZ ର କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣ ଯଥାକ୍ରମେ $90^0 - \frac{1}{2}m\angle A$, $90^0 - \frac{1}{2}m\angle B$ ଓ $90^0 - \frac{1}{2}m\angle C$ ।

22. ΔABCଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ । $\overline{BC}$ ଜ୍ୟା ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ କ୍ଷୁଦ୍ର ଚାପ ଉପରେ P ଏକ ବିନ୍ଦୁ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $PA = PB + PC$ ।

(ସୂଚନା : $\overrightarrow{BP}$ ଉପରେ D ନିଅ ଯେପରି $PC = PD$ ହେବ । ΔBCD ଓ ΔACP ର ତୁଳନା କର ।)

23. ΔABC ରେ $\angle A$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ΔABC ର ପରିବୃତ୍ତକୁ P ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । P ବିନ୍ଦୁରୁ $\overrightarrow{AB}$ ଓ $\overrightarrow{AC}$ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ ଦ୍ୱୟର ପାଦବିନ୍ଦୁ ଯଥାକ୍ରମେ Q ଏବଂ R । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $AQ = AR = \frac{AB + AC}{2}$ ।

(**ସୂଚନା :** ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\Delta PBQ \cong \Delta PCR \Rightarrow BQ = CR$)

24. ΔABC ରେ $\angle A$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ΔABC ର ପରିବୃତ୍ତକୁ P ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । $\overline{AP}$ ଓ $\overline{BC}$ ର ଛେଦ ବିନ୍ଦୁ D ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ΔABD ଓ ΔAPC ସଦୃଶ ଅଟନ୍ତି । ସୁତରାଂ ଦର୍ଶାଅ ଯେ

$AB \cdot AC = BD \cdot DC + AD^2$ ।

(ସୂଚନା : ΔABD ଓ ΔAPC ସଦୃଶ $\Rightarrow AB \cdot AC = AD \cdot AP, AD^2 = AD\,(AP - PD)$)

25. **(ଟଲେମୀଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ)** ABCD ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

$AC.BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$ ।

(ଅର୍ଥାତ୍ ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜରେ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଗୁଣଫଳ, ଚତୁର୍ଭୁଜର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଗୁଣଫଳର ସମଷ୍ଟି ସଙ୍ଗେ ସମାନ ।)

(**ସୂଚନା :** ମନେକର $m\angle ADB > m\angle BDC$ । E, $\overline{AC}$ ଉପରେ ଏପରି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଉ ଯେପରି $m\angle BDC = m\angle ADE$ । ବର୍ତ୍ତମାନ ΔADE ଏବଂ ΔBDC ସଦୃଶ $\Rightarrow \frac{AE}{BC} = \frac{AD}{BD}$ ।

ପୁନଶ୍ଚ ΔADB ଏବଂ ΔEDC ସଦୃଶ $\Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{EC}{AB}$)

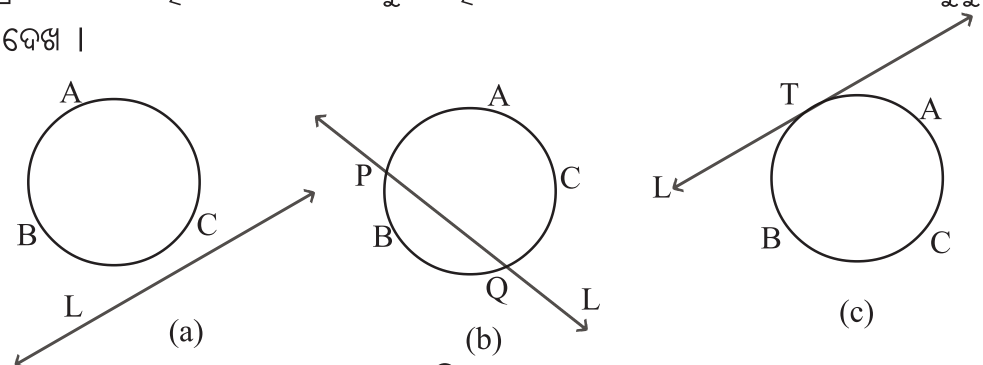
ତୃତୀୟ ଅଧ୍ୟାୟ

ବୃତ୍ତର ସ୍ପର୍ଶକ

(TANGENTS TO A CIRCLE)

3.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ଆମେ ପୂର୍ବ ଆଲୋଚନାରୁ ଜାଣୁ ଯେ, ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଏକ ବୃତ୍ତକୁ ଦୁଇରୁ ଅଧିକ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ ନାହିଁ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଆସ ଖାତାର ଗୋଟିଏ ପୃଷ୍ଠାରେ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଏବଂ ସେହି ପୃଷ୍ଠାରେ ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଅଙ୍କନ କରିବା । ଚିତ୍ରରେ ଦର୍ଶାଯାଇଥିବା ସମ୍ଭାବନା ମଧ୍ୟରୁ କରିଥିବା ଅଙ୍କନରେ ଅନ୍ୟ କୌଣସି ସମ୍ଭାବନା ଉପୁଜୁଛି କି ? ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ ।



(ଚିତ୍ର 3.1)

ଏକ ସମତଳରେ ବୃତ୍ତଟି ଅଙ୍କନ କଲା ପରେ, ସରଳରେଖାଟିଏ ଅଙ୍କନ କଲେ ଅଙ୍କନ ପରେ ତିନିଗୋଟି ସମ୍ଭାବନା ଉପୁଜେ । ତାହା ହେଲା – (i) ସରଳରେଖାଟି ବୃତ୍ତକୁ ଛେଦ କରେ ନାହିଁ (ଚିତ୍ର 3.1(a)) (ii) ସରଳରେଖାଟି ବୃତ୍ତକୁ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ (ଚିତ୍ର 3.1(b)) ଏବଂ (iii) ସରଳରେଖାଟି ବୃତ୍ତକୁ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ (ଚିତ୍ର 3.1(c)) ।

ଚିତ୍ର - 3.1(a) ରେ **ସରଳରେଖା L ଓ ବୃତ୍ତ ମଧ୍ୟରେ କୌଣସି ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ନାହିଁ ।** ଅର୍ଥାତ୍ ସରଳରେଖା L, **ବୃତ୍ତ ABCର ବହିଃସ୍ଥ** ବା ସରଳରେଖା L ଓ ବୃତ୍ତ ABC **ପରସ୍ପର ଅଣଛେଦୀ ।**

ଚିତ୍ର - 3.1(b) ରେ **ସରଳରେଖା L ଓ ବୃତ୍ତ ABC ଉଭୟର ଦୁଇଟି ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ (ବା ଛେଦବିନ୍ଦୁ) ଅଛନ୍ତି ।** ଏପରି କ୍ଷେତ୍ରରେ ସରଳରେଖା L ଓ ବୃତ୍ତ ABC କୁ ପରସ୍ପରଛେଦୀ ବୋଲି କୁହାଯାଏ ଏବଂ L କୁ ବୃତ୍ତ ABC ର ଏକ **ଛେଦକ ରେଖା (Secant)** କୁହାଯାଏ । P ଓ Q ହେଉଛନ୍ତି ଛେଦବିନ୍ଦୁ ।

ଚିତ୍ର - 3.1(c) ରେ **ସରଳରେଖା L ଓ ବୃତ୍ତ ABC ପରସ୍ପରଚ୍ଛେଦୀ, ମାତ୍ର ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଛେଦବିନ୍ଦୁ (ବା ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ) ସଂଖ୍ୟା ଏକ ।** ଏପରି ଅବସ୍ଥାରେ ସରଳରେଖା L କୁ ବୃତ୍ତ ABC ର ଏକ **ସ୍ପର୍ଶକ (tangent)** କୁହାଯାଏ ଏବଂ T ବିନ୍ଦୁ ହେଉଛି L ସ୍ପର୍ଶକର **ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ (Point of contact)** ।

ସଂଜ୍ଞା : ଗୋଟିଏ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏକବୃତ୍ତ ଓ ଏକ ସରଳରେଖାର ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ (ବା ଛେଦବିନ୍ଦୁ) ଥିଲେ, ଉକ୍ତ ସରଳରେଖାକୁ ବୃତ୍ତର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ କୁହାଯାଏ ଏବଂ ସେମାନଙ୍କର ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁକୁ ସମ୍ପୃକ୍ତ ସ୍ପର୍ଶକର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ କୁହାଯାଏ ।

ଚିତ୍ର 3.1(c) ରେ ବୃତ୍ତ ABC ର ଗୋଟିଏ ସ୍ପର୍ଶକ ହେଉଛି L ଏବଂ T ହେଉଛି ଉକ୍ତ ସ୍ପର୍ଶକର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ ।

ମନ୍ତବ୍ୟ : L ସରଳରେଖା ବୃତ୍ତକୁ T ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ କହିବା ପରିବର୍ତ୍ତେ L ସରଳରେଖା ବୃତ୍ତକୁ T ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କରେ ବୋଲି କହିବା ।

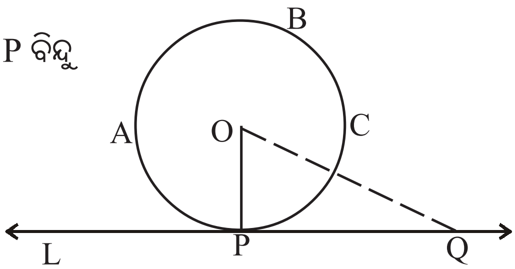
ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଓ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ କୁହାଯାଏ ।

L ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ T ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟ ଏକ ବିନ୍ଦୁ Q ନେଲେ ଏହା ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ହେବ (ଚିତ୍ର 3.2) । ନଚେତ୍ $\overleftrightarrow{PQ}$ ଅର୍ଥାତ୍ L ରେଖା ବୃତ୍ତକୁ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ । (ବୃତ୍ତ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଅଧ୍ୟାୟର ପ୍ରମେୟ - 2.1 ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ -2 ପରବର୍ତ୍ତୀ ଆଲୋଚନା ଦେଖ) । ସୁତରାଂ ଆମେ ମନେ ରଖିବା ଉଚିତ ଯେ, **କୌଣସି ବୃତ୍ତର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ ବ୍ୟତୀତ ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଅଟନ୍ତି ।**

ଉପପାଦ୍ୟ - 12

ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ ଏହାର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ।

(A tangent to a circle is perpendicular to the radius drawn through the point of contact.)



(ଚିତ୍ର 3.2)

ଦତ୍ତ : ABC ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O , L ରେଖା ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ ଓ P ବିନ୍ଦୁ ହେଉଛି ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ । $\overline{OP}$ ହେଉଛି P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\overline{OP} \perp L$

ପ୍ରମାଣ : P ଭିନ୍ନ, ରେଖା L ଉପରିସ୍ଥ ଅନ୍ୟ ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁ Q, ABC ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ।

$\therefore OQ > OP$ ($\because$ $\overline{OP}$, ବୃତ୍ତ ABC ର ଏକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)

ମାତ୍ର Q ବିନ୍ଦୁ, L ଉପରିସ୍ଥ P ଠାରୁ ଭିନ୍ନ କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ । ଏଣୁ Q ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅବସ୍ଥାନ ଲାଗି $OQ > OP$ ବା $OP < OQ$ ।

$\therefore$ O ବିନ୍ଦୁରୁ L ରେଖା ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ରେଖାଖଣ୍ଡମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ $\overline{OP}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ।

$\Rightarrow \overline{OP} \perp L$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ପ୍ରମେୟ -3.1 : (ଉପପାଦ୍ୟ - 12 ର ବିପରୀତ କଥନ ଓ ପ୍ରମାଣ) :

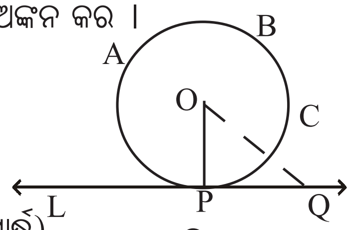
ବୃତ୍ତର କୌଣସି ବିନ୍ଦୁରେ, ଉକ୍ତ ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ, ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ ଅଟେ ।

(The line drawn perpendicular to the radius at a point of a circle through that point, is a tangent to the circle.)

ଦତ୍ତ: ABC ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O । ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P, P ବିନ୍ଦୁଠାରେ ଅଙ୍କିତ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $\overline{OP}$ ଏବଂ L $\perp$ $\overline{OP}$ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : L ରେଖା ABC ବୃତ୍ତର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ ।

ଅଙ୍କନ : L ରେଖା ଉପରେ , P ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ଭିନ୍ନ ଏକ ବିନ୍ଦୁ Q ନିଆଯାଉ । $\overline{OQ}$ ଅଙ୍କନ କର ।



(ଚିତ୍ର 3.3)

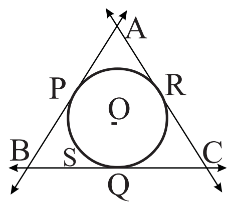
ପ୍ରମାଣ : L $\perp$ $\overline{OP}$ (ଦତ୍ତ)

$\therefore$ OPQ ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ଏବଂ $\overline{OQ}$ ଏହାର କର୍ଣ୍ଣ ।

ଅର୍ଥାତ୍ OQ, ବୃତ୍ତର ବ୍ୟସାର୍ଦ୍ଧ OP ଠାରୁ ବୃହତ୍ତର । ($\because$ $\overline{OP}$ ଏକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)
ଏଣୁ, Q ବିନ୍ଦୁ ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ।
$\Rightarrow$ P ବିନ୍ଦୁ ହେଉଛି ବୃତ୍ତ ABC ଓ ରେଖା L ର ଏକମାତ୍ର ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ।
$\therefore$ L ରେଖା, ବୃତ୍ତ ABC ର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ । (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ (1) : ଏକ ବୃତ୍ତର କୌଣସି ଏକ ସ୍ପର୍ଶକର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଠାରେ ଉକ୍ତ ସ୍ପର୍ଶକ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ, କେନ୍ଦ୍ର ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ହେବ ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ (2) : ବୃତ୍ତର ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁଠାରେ ଗୋଟିଏ ଏବଂ କେବଳ ଗୋଟିଏ ସ୍ପର୍ଶକ ଅଙ୍କିତ ହୋଇପାରିବ । କାରଣ P ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $\overline{OP}$ ର P ଠାରେ $\overline{OP}$ ପ୍ରତି କେବଳ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ଲମ୍ବ ଅଙ୍କିତ ହୋଇପାରିବ । ତେଣୁ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଅସଂଖ୍ୟ ସ୍ପର୍ଶକ ରହିଅଛି ।



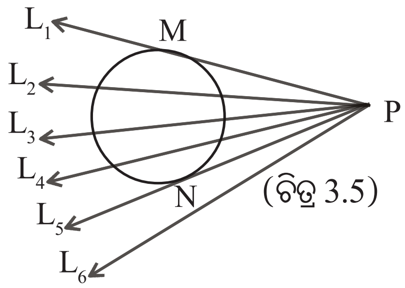
(ଚିତ୍ର 3.4)

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ଚିତ୍ର 3.4 ରେ S ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O । ବୃତ୍ତ ଉପରେ ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ P, Q ଓ R ନିଆଯାଇ ଉକ୍ତ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କଠାରେ ସ୍ପର୍ଶକମାନ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇଛି । ଯେପରିକି ସେମାନଙ୍କର ଛେଦବିନ୍ଦୁ ମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ABC ତ୍ରିଭୁଜ ଗଠିତ ହେଉଛି ଏବଂ ବୃତ୍ତ S, ΔABC ର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ରହିଛି । P, Q, R ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟର ବିଭିନ୍ନ ଅବସ୍ଥାନକୁ ନେଇ ଆମେ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ତ୍ରିଭୁଜ ପାଇବା । ଅନ୍ୟ ପକ୍ଷରେ ଯେ କୌଣସି ଏକ ତ୍ରିଭୁଜ ABC ଦତ୍ତ ଥିଲେ ଏହାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁକୁ ସ୍ପର୍ଶ କରୁଥିବା କେବଳ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ବୃତ୍ତ PQR ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇପାରିବ । ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତକୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ ବୃତ୍ତ ବା **ଅନ୍ତଃବୃତ୍ତ (Incircle)** କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O କୁ ତ୍ରିଭୁଜର **ଅନ୍ତଃକେନ୍ଦ୍ର (Incentre)** କୁହାଯାଏ । P, Q, R ସ୍ପର୍ଶ ବିନ୍ଦୁ ହୋଇଥବାରୁ $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$, $\overline{OR}$ ଯଥାକ୍ରମେ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ଓ $\overline{CA}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଅଟନ୍ତି । ଏହା ସହଜରେ ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇ ପାରିବ ଯେ $\overline{OA}$ $\overline{OB}$ ଓ $\overline{OC}$ ଯଥାକ୍ରମେ $\angle$A, $\angle$B ଓ $\angle$Cର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଅଟନ୍ତି ।

3.2 ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁରୁ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ :

ତୁମ ଖାତାର ଗୋଟିଏ ପୃଷ୍ଠାରେ ବୃତ୍ତଟିଏ ଅଙ୍କନ କର ଏବଂ ବୃତ୍ତର ବହିର୍ଦେଶରେ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ ଚିହ୍ନଟ କରି ତାର ନାମ ଦିଅ P । P ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯେତେ ସମ୍ଭବ ରେଖା ଅଙ୍କନ କର । ଚିତ୍ର 3.5 ଭଳି ଚିତ୍ରଟିଏ ପାଇବ । ସେହି

ଚିତ୍ରରେ P ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ଛଅଗୋଟି ରେଖା $L_1, L_2, L_3, ... L_6$ ମଧ୍ୟରୁ କେବଳ ଦୁଇଟି L_1 ଓ L_5 ଚିତ୍ରରେ ଥିବା ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ସ୍ପର୍ଶକ ହୋଇଥିବାର ଦେଖିବ ।



(ଚିତ୍ର 3.5)

ଏଣୁ ଆମେ ଏହି କାର୍ଯ୍ୟରୁ ଜାଣିଲେ ଯେ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁରୁ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଦୁଇଟି ଏବଂ କେବଳ ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକ ଅଙ୍କନ ସମ୍ଭବ (ଅବଶ୍ୟ ଏହା ପ୍ରମାଣ ଯୋଗ୍ୟ ତଥ୍ୟ) । ମାତ୍ର ଏହାର ପ୍ରମାଣ ଆମ ଆଲୋଚନାର ପରିସରଭୁକ୍ତ ନୁହେଁ ।

ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ରଶ୍ମି : ଚିତ୍ର 3.5 ରେ P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ରେଖା L_1 ଓ L_5 ପ୍ରତ୍ୟେକେ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ସ୍ପର୍ଶକ । ଚିତ୍ରରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ, $\overrightarrow{PM} \subset L_1$ ଏବଂ $\overrightarrow{PN} \subset L_5$ । ସ୍ପର୍ଶକ L_1 ର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ M, $\overrightarrow{PM}$ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏବଂ ସ୍ପର୍ଶକ L_5 ର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ N, $\overrightarrow{PN}$ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେତୁ $\overrightarrow{PM}$ ଓ $\overrightarrow{PN}$ ମଧ୍ୟ ବୃତ୍ତକୁ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କରନ୍ତି । ଏଣୁ ଆମେ $\overrightarrow{PM}$ ଓ $\overrightarrow{PN}$ କୁ ବୃତ୍ତ ବହିଃସ୍ଥ P ବିନ୍ଦୁରୁ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ରଶ୍ମି ବୋଲି କହିବା । ଚିତ୍ର 3.5 ରେ $\overrightarrow{PM}$ ଓ $\overrightarrow{PN}$ ପ୍ରତ୍ୟେକେ, ସମ୍ପୃକ୍ତ ବୃତ୍ତର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ସ୍ପର୍ଶକ ରଶ୍ମି ଏବଂ M ଓ N ଯଥାକ୍ରମେ $\overrightarrow{PM}$ ଓ $\overrightarrow{PN}$ ର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ । ପ୍ରକାଶ ଥାଉକି ପ୍ରତ୍ୟେକ ସ୍ପର୍ଶକ ରଶ୍ମି ବୃତ୍ତର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ସ୍ପର୍ଶକ ଅଟନ୍ତି ।

ସ୍ପର୍ଶକ -ଖଣ୍ଡ (Tangent segment) : ଚିତ୍ର 3.5 ରେ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ P ବିନ୍ଦୁରୁ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ L_1 ର ସ୍ପର୍ଶ ବିନ୍ଦୁ M ଏବଂ ସ୍ପର୍ଶକ L_5 ର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ N ।

$\overline{PM}$ ଓ $\overline{PN}$ ପ୍ରତ୍ୟେକକୁ ବୃତ୍ତ ବହିଃସ୍ଥ P ବିନ୍ଦୁରୁ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ **ସ୍ପର୍ଶକ-ଖଣ୍ଡ** କୁହାଯାଏ । ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ ଗୋଟିଏ ରେଖା ହୋଇଥିବାରୁ ଏହାର କୌଣସି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନ ଥାଏ । ମାତ୍ର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ-ଖଣ୍ଡ ଗୋଟିଏ ରେଖାଖଣ୍ଡ ହୋଇଥିବାରୁ **ଉକ୍ତ ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡର ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଥାଏ ।**

ଟୀକା : 'ବୃତ୍ତ ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ' କହିଲେ ଆମେ ବୃତ୍ତର ସମତଳରେ ତଥା ବୃତ୍ତର ବହିର୍ଦ୍ଦେଶରେ ଥିବା ଏକ ବିନ୍ଦୁକୁ ବୁଝିବା ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 13

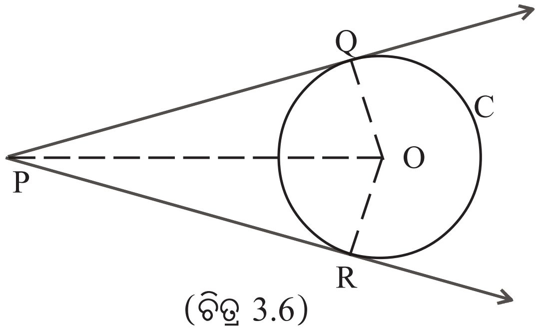
କୌଣସି ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡ ଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ।

(The lengths of two tangent segments drawn to a circle from an external point are equal.)

ଦତ୍ତ : ବୃତ୍ତ C ର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P । P ବିନ୍ଦୁରୁ C ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡ ହେଉଛନ୍ତି $\overline{PQ}$ ଓ $\overline{PR}$ ଏବଂ Q ଓ R ଯଥାକ୍ରମେ ସେମାନଙ୍କର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : PQ = PR

ଅଙ୍କନ : $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$ ଏବଂ $\overline{OR}$ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ ।



(ଚିତ୍ର 3.6)

ପ୍ରମାଣ: ΔOQP ଏବଂ ΔORP ରେ

$\because \begin{cases} \angle OQP \cong \angle ORP & \text{(ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମକୋଣ । } \because \overline{OQ} \text{ ଏବଂ } \overline{OR} \text{ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ ଗାମୀ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)} \\ \text{କର୍ଣ୍ଣ } \overline{OP} \cong \overline{OP} & \text{(ସାଧାରଣ ବାହୁ) ଏବଂ } \overline{OQ} \cong \overline{OR} \text{ (ଏକ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)} \end{cases}$

$\therefore \Delta OQP \cong \Delta ORP$ (ସ.କ.ବା ସର୍ବସମତା)

$\Rightarrow \overline{PQ} \cong \overline{PR}$ (ସର୍ବସମ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନୁରୂପ ବାହୁ) ଅର୍ଥାତ୍ $PQ = PR$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - (1) : କୌଣସି ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରୁ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡ $\overline{PQ}$ ଓ $\overline{PR}$ ହେଲେ ଏବଂ O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ହେଲେ, $\overline{PO}, \angle QPR$ ଏବଂ $\angle QOR$ କୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ ।

ଉପରୋକ୍ତ ଉପପାଦ୍ୟ-13 ରେ ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇଛି : $\Delta OQP \cong \Delta ORP$

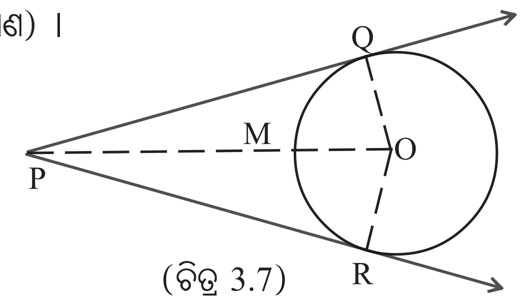
$\Rightarrow \angle OPQ \cong \angle OPR$ (ସର୍ବସମ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନୁରୂପ କୋଣ) ।

ଅର୍ଥାତ୍ $\overline{PO}$ ଦ୍ୱାରା $\angle QPR$ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡିତ ହୁଏ ।

ପୁନଶ୍ଚ $\angle POQ \cong \angle POR$

(ସର୍ବସମ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନୁରୂପ କୋଣ) ।

ଅର୍ଥାତ୍ $\overline{PO}$ ଦ୍ୱାରା $\angle QOR$ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡିତ ହୁଏ) ।



(ଚିତ୍ର 3.7)

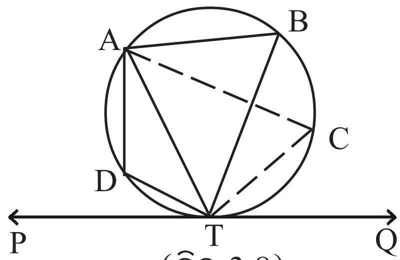
ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - (2) : କୌଣସି ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରୁ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡ $\overline{PQ}$ ଓ $\overline{PR}$ ହେଲେ ଏବଂ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ହେଲେ $\overline{PO}$, $\overset{\frown}{QR}$ ଚାପକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ ।

ଚିତ୍ର 3.7 ରେ $\overline{PO}$ ବୃତ୍ତକୁ M ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଛି । $m\angle QOM = m\angle ROM$ ହେତୁ $\overline{QM}$ ଓ $\overline{MR}$ (ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରେ) ଜ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ । ସୁତରାଂ M, $\overset{\frown}{QMR}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ।

3.3 ଏକାନ୍ତର ଚାପ (Alternate arc) :

ଚିତ୍ର 3.8 ରେ ଥିବା ABC ବୃତ୍ତର T ବିନ୍ଦୁରେ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି $\overleftrightarrow{PQ}$ ସ୍ପର୍ଶକ ଅଙ୍କିତ । T ବିନ୍ଦୁରେ $\overline{TA}$ ଜ୍ୟା ମଧ୍ୟ ଅଙ୍କିତ । $\overline{TA}$ ଜ୍ୟାକୁ $\overleftrightarrow{PQ}$ ସ୍ପର୍ଶକର **ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଜ୍ୟା** ବୋଲି କୁହାଯାଏ ।

ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଜ୍ୟା $\overline{TA}$, ସ୍ପର୍ଶକ $\overleftrightarrow{PQ}$ ସହ $\angle ATP$ ଓ $\angle ATQ$ ଅଙ୍କନ କରେ । ଜ୍ୟା $\overline{TA}$ ଦ୍ୱାରା ବୃତ୍ତ ABC ଉପରେ ଦୁଇଟି ଚାପ $\overset{\frown}{ABT}$ ଓ $\overset{\frown}{ADT}$ ଉତ୍ପନ୍ନ ହୁଏ । ଏହା ଲକ୍ଷ୍ୟ କରାଯାଇ ପାରେ ଯେ $\overline{TA}$ ଜ୍ୟାର ଯେଉଁ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ସ୍ପର୍ଶକ ଉପରିସ୍ଥ P ବିନ୍ଦୁ ଅବସ୍ଥିତ, ତା'ର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ବୃତ୍ତ ଉପରେ B ବିନ୍ଦୁ ଅବସ୍ଥିତ । ଏଠାରେ $\overset{\frown}{ABT}$ କୁ $\angle ATP$ର **ଏକାନ୍ତର ଚାପ** କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଏହି ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ$\angle ABT$ କୁ $\angle ATP$ ର **ଏକାନ୍ତର ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ**



(ଚିତ୍ର 3.8)

କୁହାଯାଏ । $\angle ACT$ ମଧ୍ୟ $\angle ATP$ ର ଅନ୍ୟ ଏକ ଏକାନ୍ତର ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ଅଟେ । ଅନୁରୂପ କାରଣରୁ $\angle ATQ$ ର ଏକାନ୍ତର ଚାପ ହେଉଛି $\overset{\frown}{ADT}$ ଏବଂ ଏକ ଏକାନ୍ତର ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ହେଉଛି $\angle ADT$ ।

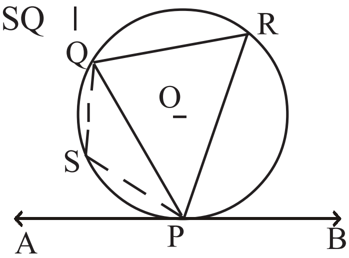
3.3.1 ଏକ ସ୍ପର୍ଶକର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଜ୍ୟା ଓ ଉକ୍ତ ସ୍ପର୍ଶକ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ ସମ୍ପର୍କିତ ତଥ୍ୟ :

ଏକ ସ୍ପର୍ଶକର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଜ୍ୟା ଏବଂ ଉକ୍ତ ସ୍ପର୍ଶକ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ ସହ ଏକାନ୍ତର ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣର ସମ୍ପର୍କକୁ ଆମେ ପରବର୍ତ୍ତୀ ପ୍ରମେୟରେ ପଢ଼ିବା ।

ପ୍ରମେୟ - 3.2 : ବୃତ୍ତର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ, ଏହାର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ କୌଣସି ଏକ ଜ୍ୟା ସହିତ ଯେଉଁ କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରେ, ତା'ର ପରିମାଣ ସହ ଉକ୍ତ କୋଣର ଏକାନ୍ତର ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣର ପରିମାଣ ସମାନ ।

(The measure of an angle formed by a tangent to a circle and a chord through the point of contact is equal to the measure of an angle inscribed in the alternate arc.)

ଦତ୍ତ : O କେନ୍ଦ୍ର ବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତ PQR ର P ବିନ୍ଦୁରେ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ $\overleftrightarrow{AB}$ ଏବଂ $\overline{PQ}$, ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଏକ ଜ୍ୟା (ଚିତ୍ର 3.9) । $\overleftrightarrow{AB}$ ସହ $\overline{PQ}$ ଉତ୍ପନ୍ନ କରୁଥିବା କୋଣ ଦୁଇଟି ହେଲେ $\angle APQ$ ଏବଂ $\angle BPQ$ । $\angle APQ$ ର ଏକାନ୍ତର ଚାପ $\overset{\frown}{PRQ}$ ଏବଂ $\angle APQ$ ର ଗୋଟିଏ ଏକାନ୍ତର ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ $\angle PRQ$ । ସେହିପରି $\angle BPQ$ର ଏକାନ୍ତର ଚାପ $\overset{\frown}{PSQ}$ ଏବଂ $\angle BPQ$ ର ଏକ ଏକାନ୍ତର ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ $\angle PSQ$ ।



(ଚିତ୍ର 3.9)

ସିଦ୍ଧାନ୍ତ : (i) $m\angle APQ = m\angle PRQ$

(ii) $m\angle BPQ = m\angle PSQ$

ପ୍ରମେୟ - 3.3 : (ପ୍ରମେୟ 3.2 ର ବିପରୀତ କଥନ) :

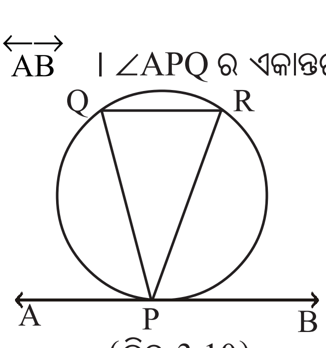
ଏକ ବୃତ୍ତର କୌଣସି ଏକ ଜ୍ୟା, ଏହାର ଏକ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ଏକ ସରଳରେଖା ସହ ଯେଉଁ କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରେ, ତାହା ଉକ୍ତ କୋଣର ଏକାନ୍ତର ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ସହ ସମପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ ହେଲେ, ସରଳରେଖାଟି ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ ହେବ ।

(If the angle which a chord makes with the straight line drawn through one end of it is equal in measure to the angle inscribed in the alternate arc of the angle, then the line is a tangent to the circle.)

ଦତ୍ତ : PQR ବୃତ୍ତର $\overline{PQ}$ ଏକ ଜ୍ୟା ଏବଂ P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଏକ ସରଳରେଖା $\overleftrightarrow{AB}$ । $\angle APQ$ ର ଏକାନ୍ତର ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଏକ କୋଣ $\angle PRQ$ । $m\angle APQ = m\angle PRQ$

ସିଦ୍ଧାନ୍ତ : $\overleftrightarrow{AB}$ ହେଉଛି PQR ବୃତ୍ତର P ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶକ ।

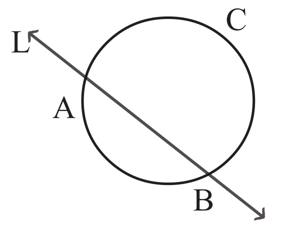
ମନ୍ତବ୍ୟ : ପ୍ରମେୟ 3.2 ଏବଂ ପ୍ରମେୟ 3.3ର ପ୍ରମାଣ ଆମର ଆଲୋଚନାର ପରିସରଭୁକ୍ତ ନୁହେଁ; କେବଳ ପ୍ରୟୋଗ ଦୃଷ୍ଟିରୁ ସିଦ୍ଧାନ୍ତକୁ ମନେ ରଖିବା ଉଚିତ ।



(ଚିତ୍ର 3.10)

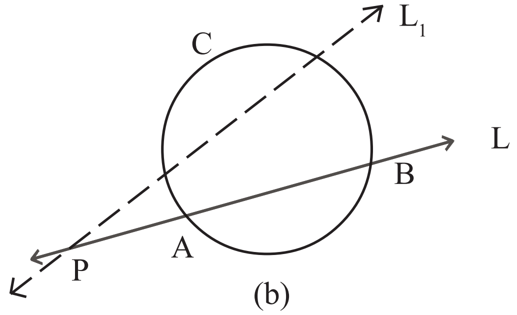
3.4 ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଛେଦକ :

ଚିତ୍ର 3.11 (a) ରେ L ରେଖା ABC ବୃତ୍ତର ଏକ ଛେଦକ ରେଖା ଏବଂ ଏହା ବୃତ୍ତ ABC କୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଛି । A, B ଏବଂ A ଓ B ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଭିନ୍ନ L ରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ବୃତ୍ତ ABC ର ବହିଃସ୍ଥ ।



(a)

(ଚିତ୍ର 3.11)



(b)

ଚିତ୍ର 3.11(b) ରେ ବୃତ୍ତ ବହିଃସ୍ଥ P ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁ । ଏଠାରେ ଛେଦକ ରେଖା L, P ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ । P ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ବୃତ୍ତ ABC ର ଅନ୍ୟ ଛେଦକ ରେଖା ହେଉଛି L_1 । ଏହିଭଳି P ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଅସଂଖ୍ୟ ଛେଦକ ଅଙ୍କନ ସମ୍ଭବ ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 14

ଏକ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ କୌଣସି ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ P ଦେଇ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ-ଖଣ୍ଡ $\overline{PT}$ ଏବଂ ଏକ ଛେଦକ $\overleftrightarrow{PAB}$ ଅଙ୍କିତ ହେଲେ, PA x PB = PT^2 ।

(If from an external point P of a circle a tangent segment $\overline{PT}$ and a secant $\overleftrightarrow{PAB}$ are drawn, then PA x PB = PT^2.)

ଦତ୍ତ : TBA ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ P ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ । P ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ଛେଦକ, ବୃତ୍ତକୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ ଏବଂ $\overleftrightarrow{PT}$ ସ୍ପର୍ଶକ, ବୃତ୍ତକୁ T ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କରେ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : PA x PB = PT^2

ଅଙ୍କନ : $\overline{TA}$ ଓ $\overline{TB}$ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ ।

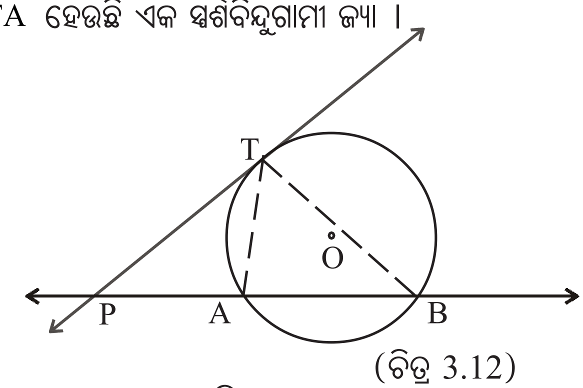
ପ୍ରମାଣ : TAB ବୃତ୍ତର T ବିନ୍ଦୁରେ $\overleftrightarrow{PT}$ ସ୍ପର୍ଶକ ଏବଂ $\overline{TA}$ ହେଉଛି ଏକ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଜ୍ୟା ।

$\therefore m\angle PTA = m\angle TBA$ (ପ୍ରମେୟ - 3.2)

ΔPTA ଏବଂ ΔPBT ମଧ୍ୟରେ

$\because$ { $m\angle TPA = m\angle TPB$ (ସାଧାରଣ କୋଣ) ଏବଂ
$m\angle PTA = m\angle TBP$ }

$\therefore \Delta PTA \sim \Delta PBT$ (କୋ-କୋ ସାଦୃଶ୍ୟ)

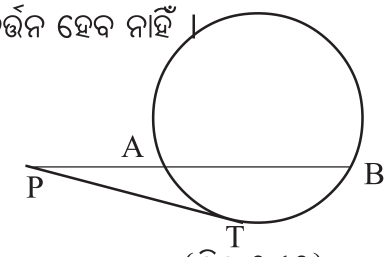


(ଚିତ୍ର 3.12)

$\Rightarrow \frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PB} = \frac{AT}{BT} \Rightarrow \frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PB} \Rightarrow PA \times PB = PT^2$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ମନ୍ତବ୍ୟ (i) : ଉପରୋକ୍ତ ପ୍ରମାଣରେ, ଛେଦକ ଉପରିସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P, A ଓ B କୁ P - A- B ରୂପେ ନିଆଯାଇଛି । ସେ ବିନ୍ଦୁ ତିନୋଟିକୁ P - B - A ରୂପେ ନିଆଗଲେ ମଧ୍ୟ ପ୍ରମାଣରେ କିଛି ପରିବର୍ତ୍ତନ ହେବ ନାହିଁ ।

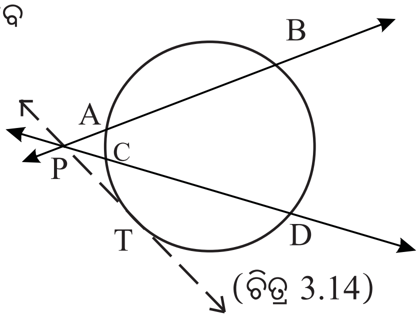
ମନ୍ତବ୍ୟ (ii): ପୂର୍ବ ପ୍ରମାଣିତ ଉପପାଦ୍ୟର ପ୍ରମାଣ କଲାବେଳେ ଚିତ୍ର 3.13 ଭଳି ମଧ୍ୟ ଚିତ୍ର କରାଯାଇପାରେ ।



(ଚିତ୍ର 3.13)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ -1: ଏକ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଦେଇ ଦୁଇଟି ଛେଦକ ଯଦି ବୃତ୍ତକୁ ଯଥାକ୍ରମେ A,B ଓ C,D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି, ତେବେ ସ୍ପର୍ଶକ $\overleftrightarrow{PT}$ (ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ T) ଅଙ୍କନ କରି ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇପାରିବ ଯେ,

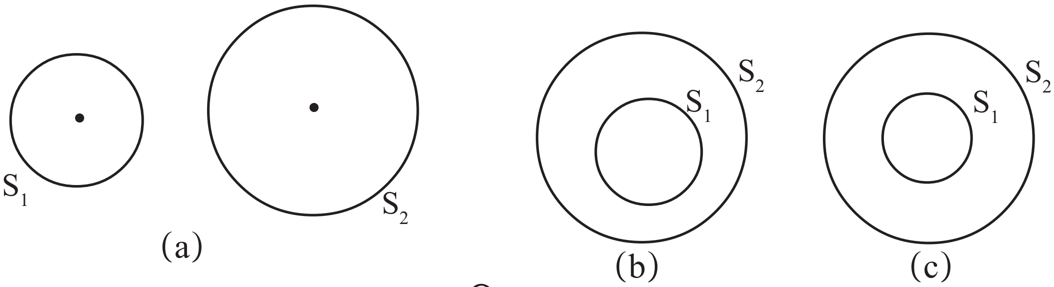
PA x PB = PC x PD



(ଚିତ୍ର 3.14)

3.5 ଏକାଧିକ ବୃତ୍ତ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତେକ ତଥ୍ୟ :

ଏକ ସମତଳରେ ଅଙ୍କିତ ଦୁଇଟି S_1 ଓ S_2 ର ବିଭିନ୍ନ ଅବସ୍ଥିତି ନିମ୍ନ ଚିତ୍ରମାନଙ୍କରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।



(ଚିତ୍ର 3.15)

(a) ପରସ୍ପର ଅଣଛେଦୀ ବୃତ୍ତ :

ଚିତ୍ର 3.15 (a)ରେ ଥିବା ବୃତ୍ତ S_1 ଓ S_2 ପରସ୍ପର ଅଣଛେଦୀ ଏବଂ ପରସ୍ପରର ବହିଃସ୍ଥ ।

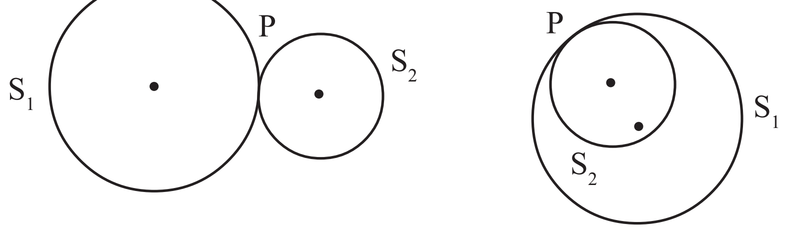
ଚିତ୍ର 3.15 (b)ରେ ଥିବା ବୃତ୍ତ S_1 ଓ S_2 ପରସ୍ପର ଅଣଛେଦୀ ଏବଂ ବୃତ୍ତ S_1, S_2 ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ।

ଚିତ୍ର 3.15 (c)ରେ ଥିବା ବୃତ୍ତ S_1 ଓ S_2 **ପରସ୍ପର ଅଣଛେଦୀ** ଏବଂ ବୃତ୍ତ S_1 ଅନ୍ୟ ବୃତ୍ତ S_2 ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଏବଂ **ଉଭୟ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଅଭିନ୍ନ** । ଏପରି ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟକୁ **ଏକକେନ୍ଦ୍ରିକ ବୃତ୍ତ (Concentric circle)** କୁହାଯାଏ ।

ଦୁଇଟିରୁ ଅଧିକ ସଂଖ୍ୟକ ବୃତ୍ତ ମଧ୍ୟ ଏକକେନ୍ଦ୍ରିକ ହୋଇପାରନ୍ତି ।

ଦୁଇଟି ଏକକେନ୍ଦ୍ରିକ ବୃତ୍ତର ସଂଯୋଗରେ ଏକ **ବୃତ୍ତାକୃତି ବଳୟ (Circular annulus)** ଗଠିତ ହୁଏ । ଏକ ବୃତ୍ତାକୃତି ବଳୟ ଓ ଏହା ସହ ସଂପୃକ୍ତ **ବହିଃସ୍ଥ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ଓ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବୃତ୍ତର ବହିର୍ଦେଶର ଛେଦ ଦ୍ୱାରା ଗଠିତ କ୍ଷେତ୍ରକୁ ବଳୟାକୃତି କ୍ଷେତ୍ର (Annular Region) କୁହାଯାଏ ।**

(b) ଗୋଟିଏ ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ଥିବା ବୃତ୍ତ ।

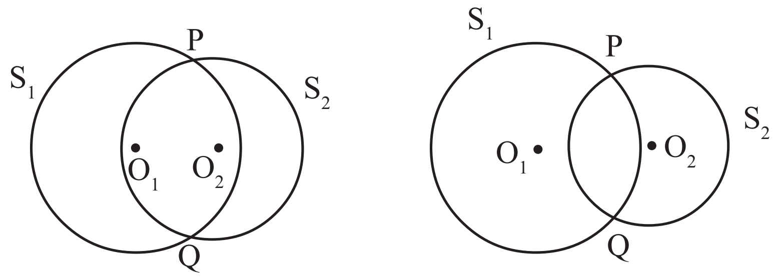


(a) (ଚିତ୍ର 3.16) (b)

ଚିତ୍ର 3.16 (a)ରେ S_1 ଓ S_2 ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ଗୋଟିଏ ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ଅଛି ଓ ତାହା ହେଉଛି P ।

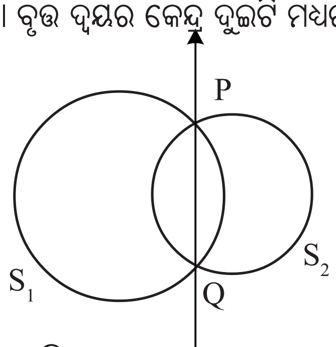
ଚିତ୍ର 3.16 (b)ରେ S_1 ଓ S_2 ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ଗୋଟିଏ ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ଅଛି ଓ ତାହା ହେଉଛି P । ଏଠାରେ S_2 ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର, S_1 ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ଅବସ୍ଥିତ । (a) ଓ (b) ପ୍ରତ୍ୟେକ ଚିତ୍ରରେ ଥିବା ବୃତ୍ତ ଯୋଡ଼ିକୁ **ସ୍ପର୍ଶକବୃତ୍ତ (tangent circles)** କୁହାଯାଏ । ଚିତ୍ର(a)ରେ ଥିବା ସ୍ପର୍ଶକବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟଙ୍କୁ **ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତ (Externally tangent circles)** ଓ ଚିତ୍ର (b)ରେ ଥିବା ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟଙ୍କୁ **ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତ (Internally tangent circles)** କୁହାଯାଏ ।

(c) ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁରେ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରୁଥିବା ବୃତ୍ତ :



(a) (ଚିତ୍ର 3.17) (b)

ଚିତ୍ର 3.17 (a) ଓ (b) ପ୍ରତ୍ୟେକରେ ଥିବା ବୃତ୍ତ S_1 ଓ S_2 ପରସ୍ପରକୁ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ P ଓ Q ରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ଚିତ୍ର (a) ଓ (b)ରେ ବୃତ୍ତଯୋଡ଼ିଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ବିଶେଷ କିଛି ପାର୍ଥକ୍ୟ ନାହିଁ । (a) ଚିତ୍ରରେ ଥିବା ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟର କେନ୍ଦ୍ର ଦୁଇଟି ଉଭୟ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ଅବସ୍ଥିତ ଥିବା ବେଳେ (b) ଚିତ୍ରରେ ଥବା ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର କେନ୍ଦ୍ର ଦୁଇଟି ମଧ୍ୟରୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ କେବଳ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ଅବସ୍ଥିତ ।



(ଚିତ୍ର 3.18)

ଚିତ୍ର 3.18 ରେ ମଧ୍ୟ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁରେ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରୁଥିବା ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ S_1 ଓ S_2 ଦର୍ଶାଯାଇଛି । P ଓ Q ହେଉଛନ୍ତି ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁ। $\overleftrightarrow{PQ}$ ରେଖାକୁ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର **ରାଡ଼ିକାଲ୍ ଅକ୍ଷ (Radical axis)** କୁହାଯାଏ । **ରାଡ଼ିକାଲ୍ ଅକ୍ଷ ଉପରିସ୍ଥ ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁରୁ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡ ଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ।**

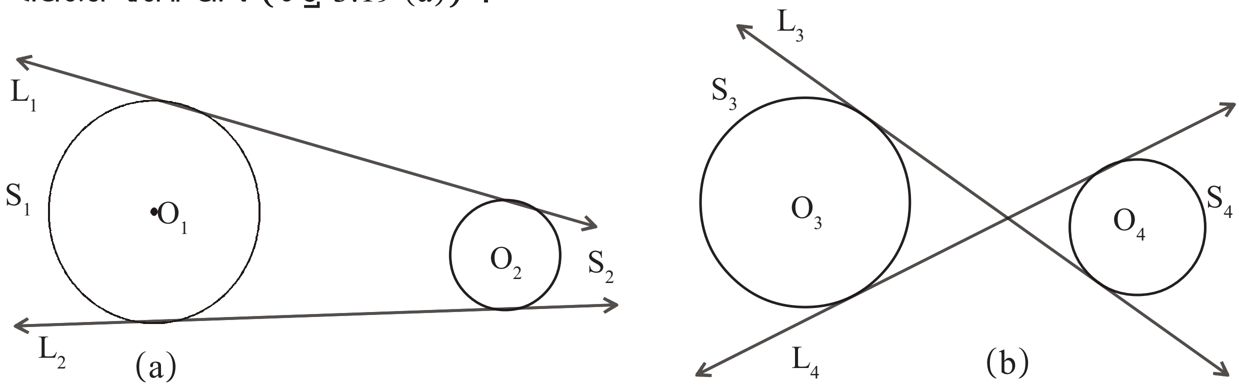
ରାଡ଼ିକାଲ୍ ଅକ୍ଷ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଉଚ୍ଚତର ଗଣିତରେ ଅଧିକ ଜାଣିବ । $\overline{PQ}$ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର **ସାଧାରଣ ଜ୍ୟା (Common chord)** କୁହାଯାଏ ।

3.6 ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ (Common Tangents)

ଏକ ସମତଳରେ ଥିବା ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତକୁ ସେହି ସମତଳରେ ଯେଉଁ ସରଳରେଖା ସ୍ପର୍ଶ କରେ ତାକୁ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର **ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ (Common tangent)** କୁହାଯାଏ । ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାର ଅବସ୍ଥିତିରେ ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତର ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକର ଚିତ୍ର ନିମ୍ନରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।

(a) ପରସ୍ପର ଅଣଛେଦୀ ବୃତ୍ତର ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ :

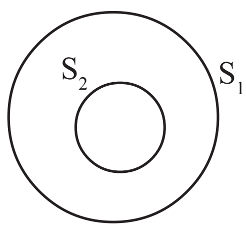
ଚିତ୍ର 3.19 (a) ଓ (b) ପ୍ରତ୍ୟେକରେ ଦୁଇଟି ଅଣଛେଦୀ ତଥା ପରସ୍ପର ବହିଃସ୍ଥ ବୃତ୍ତର ଚିତ୍ର ଦର୍ଶାଯାଇଛି । ଚିତ୍ର 3.19 (a)ରେ ଥିବା S_1 ଓ S_2 ଉଭୟ ବୃତ୍ତକୁ L_1 ସରଳରେଖା ସ୍ପର୍ଶ କରୁଛି । ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର କେନ୍ଦ୍ର O_1 ଓ O_2 ଉଭୟ L_1 ରେଖାର ଗୋଟିଏ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ । ଏପରି ସ୍ଥଳେ L_1 ରେଖାକୁ ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟର **ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ (direct common tangent)** କୁହାଯାଏ । L_2 ରେଖା ମଧ୍ୟ ଚିତ୍ର (a)ରେ ଥିବା ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ଅନ୍ୟ ଏକ ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ । ଏଣୁ **ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ଦୁଇଟି ଅଣଛେଦୀ ତଥା ପରସ୍ପର ବହିଃସ୍ଥ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଗୋଟି ସରଳ ସାଧରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ଥାଏ (ଚିତ୍ର 3.19 (a)) ।**



(ଚିତ୍ର 3.19)

ଚିତ୍ର 3.19 (b)ରେ ଥିବା S_3 ଓ S_4 ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟକୁ L_3 ସରଳରେଖା ସ୍ପର୍ଶ କରୁଛି ଏବଂ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରାଯାଇପାରେ ଯେ କେନ୍ଦ୍ର O_3 ଏବଂ O_4 , L_3 ରେଖାର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅଛନ୍ତି । ଏପରି କ୍ଷେତ୍ରରେ, ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକକୁ **ତିର୍ଯ୍ୟକ୍ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ (transverse common tangent)** କୁହାଯାଏ ।

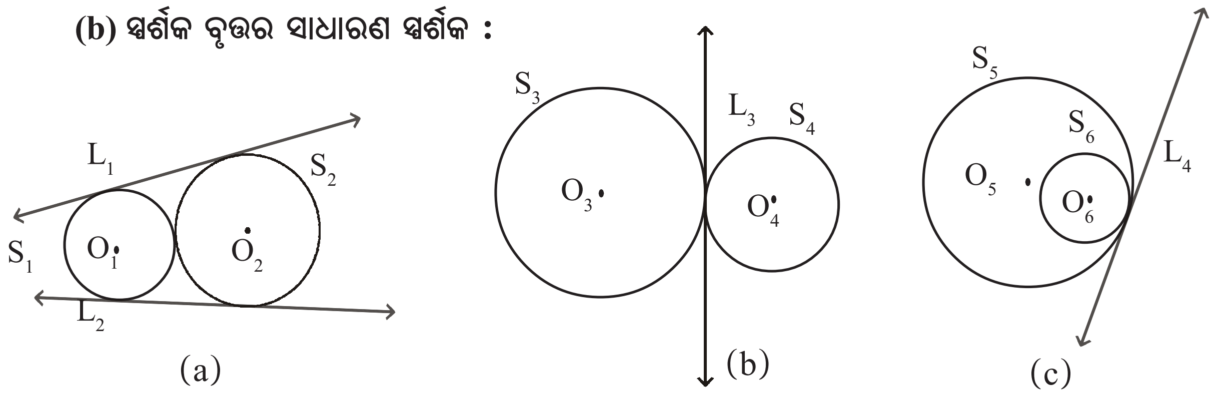
ଚିତ୍ରରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ **ଦୁଇଟି ଅଣଛେଦୀ ତଥା ପରସ୍ପର ବହିଃସ୍ଥ ବୃତ୍ତ ଲାଗି ଦୁଇଟି ତିର୍ଯ୍ୟକ୍ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ଥାଏ ।(ଚିତ୍ର 3.19 (b))**



(ଚିତ୍ର 3.20)

ଚିତ୍ର 3.20 ରେ **ଦୁଇଟି ଅଣଛେଦୀ ବୃତ୍ତ S_1 ଓ S_2 ମଧ୍ୟରୁ S_2 ବୃତ୍ତ S_1 ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ । ଏଣୁ ଏପରି କ୍ଷେତ୍ରରେ କୌଣସି ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ରହିବା ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ ।**

(b) ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତର ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ :



(ଚିତ୍ର 3.21)

(i) **ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତର ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ :** ଚିତ୍ର 3.21 (a)ରେ S_1 ଓ S_2 ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟ ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତ (ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ) L_1 ଓ L_2 ଉଭୟ S_1 ଓ S_2 ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ।

(ii) **ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତର ତୀର୍ଯ୍ୟକ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ :**

3.21 (b) ରେ S_3 ଓ S_4 ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତ । L_3 ହେଉଛି ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ତୀର୍ଯ୍ୟକ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ । ଏହା ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ସ୍ପର୍ଶ ବିନ୍ଦୁରେ ହିଁ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟକୁ ସ୍ପର୍ଶ କରୁଛି ।

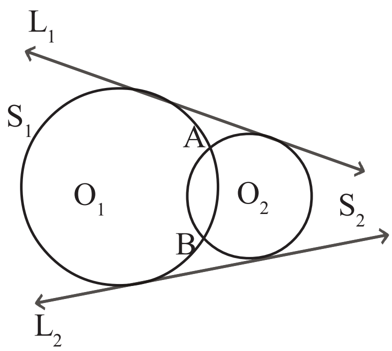
(iii) **ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶୀ ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତର ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ :**

ଚିତ୍ର 3.21 (c) ରେ S_5 ଓ S_6 ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟ ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶୀ ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତ । L_4 ରେଖା ଉଭୟ ବୃତ୍ତର ସ୍ପର୍ଶ ବିନ୍ଦୁରେ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟକୁ ସ୍ପର୍ଶ କରୁଛି । ଏହା ହେଉଛି ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ।

ଚିତ୍ର 3.21 (a) ଓ (c) କ୍ଷେତ୍ରରେ ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ଏବଂ ଚିତ୍ର 3.21 (b) କ୍ଷେତ୍ରରେ ସ୍ପର୍ଶକବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ତୀର୍ଯ୍ୟକ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ । କାହିଁକି ?

(c) ପରସ୍ପରଛେଦୀ ଦୁଇଟି ଛେଦ ବିନ୍ଦୁ ଥିବା ବୃତ୍ତର ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ :

ଚିତ୍ର 3.22 ରେ S_1 ଓ S_2 ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ଏଠାରେ L_1 ଓ L_2 ରେଖାଦ୍ୱୟ ପ୍ରତ୍ୟେକ S_1 ଓ S_2 ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟକୁ ସ୍ପର୍ଶ କରନ୍ତି । ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର କେନ୍ଦ୍ର O_1 ଏବଂ O_2 ଉଭୟ L_1 ର ଗୋଟିଏ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ । O_1 ଏବଂ O_2 ଉଭୟ L_2 ର ମଧ୍ୟ ଗୋଟିଏ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ । ଏଣୁ L_1 ଓ L_2 ପ୍ରତ୍ୟେକ, S_1 ଓ S_2 ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ।



(ଚିତ୍ର 3.22)

3.7 ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକ-ବୃତ୍ତର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ ଓ ସେମାନଙ୍କର କେନ୍ଦ୍ରଦ୍ୱୟର ଆପେକ୍ଷିକ ଅବସ୍ଥିତି :

ପରସ୍ପରକୁ ସ୍ପର୍ଶ କରୁଥିବା ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ ଏବଂ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର କେନ୍ଦ୍ର ,ଏହିପରି ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁର ଆପେକ୍ଷିକ ଅବସ୍ଥିତି ସମ୍ବନ୍ଧରେ ପରବର୍ତ୍ତୀ ଉପପାଦ୍ୟରେ ପଢ଼ିବା ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 15

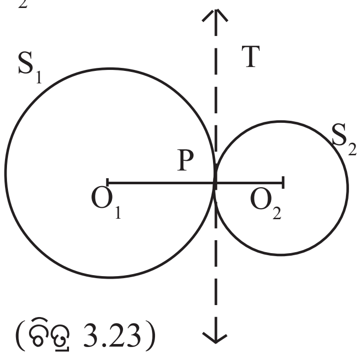
ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଦ୍ୱୟ ଓ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

(The centres of two tangent circles and their point of contact are collinear)

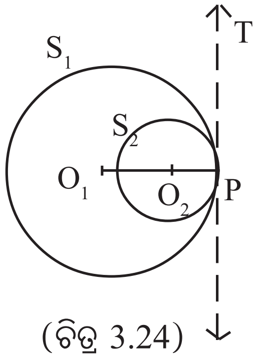
ଦତ୍ତ : S_1 ଓ S_2 ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ P ଏବଂ ସେମାନଙ୍କର କେନ୍ଦ୍ର ଯଥାକ୍ରମେ O_1 ଏବଂ O_2 ।

ଚିତ୍ର 3.23ରେ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟ ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ଏବଂ ଚିତ୍ର 3.24ରେ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟ ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶୀ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : O_1, O_2 ଏବଂ P ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ ।



(ଚିତ୍ର 3.23)



(ଚିତ୍ର 3.24)

ଅଙ୍କନ : ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ସ୍ପର୍ଶ ବିନ୍ଦୁରେ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ $\overleftrightarrow{PT}$ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ ଏବଂ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $\overline{PO_1}$ ଓ $\overline{PO_2}$ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ । (ଚିତ୍ର 3.23 ଓ ଚିତ୍ର 3.24 ରେ ଯଥାକ୍ରମେ ତୀର୍ଯ୍ୟକ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ଏବଂ ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ଅଙ୍କିତ ହୋଇଛି ।)

ପ୍ରମାଣ : S_1 ବୃତ୍ତର ସ୍ପର୍ଶକ $\overleftrightarrow{PT}$ ଏବଂ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ PO_1 । $\therefore \overline{O_1P} \perp \overleftrightarrow{PT} \Rightarrow \overleftrightarrow{O_1P} \perp \overleftrightarrow{PT}$

ସେହିପରି S_2 ବୃତ୍ତର ସ୍ପର୍ଶକ $\overleftrightarrow{PT}$ ଏବଂ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବ୍ୟସାର୍ଦ୍ଧ $\overline{O_2P}$ ।

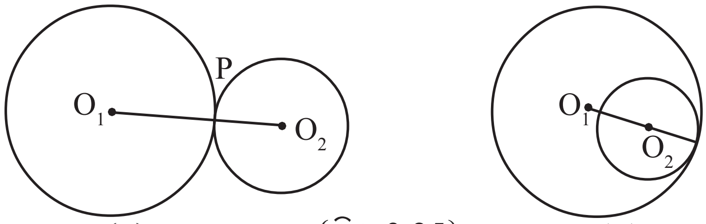
$\therefore \overline{O_2P} \perp \overleftrightarrow{PT} \Rightarrow \overleftrightarrow{O_2P} \perp \overleftrightarrow{PT}$

ମାତ୍ର $\overleftrightarrow{PT}$ ର P ବିନ୍ଦୁରେ ଗୋଟିଏ ଓ କେବଳ ଗୋଟିଏ ଲମ୍ବ ସମ୍ଭବ । $\therefore$ $\overleftrightarrow{O_1P}$ ଏବଂ $\overleftrightarrow{O_2P}$ ରେଖାଦ୍ୱୟ ଅଭିନ୍ନ ।

ଏଣୁ O_1 , O_2 ଓ P ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଏକ ରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ । (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ -1 : ଦୁଇଟି ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତା, ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧର ସମଷ୍ଟି ସହ ସମାନ [ଚିତ୍ର 3.25 (a)]

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 2 : ଦୁଇଟି ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତା, ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧର ଅନ୍ତର ସହ ସମାନ [(ଚିତ୍ର 3.25 (b))]



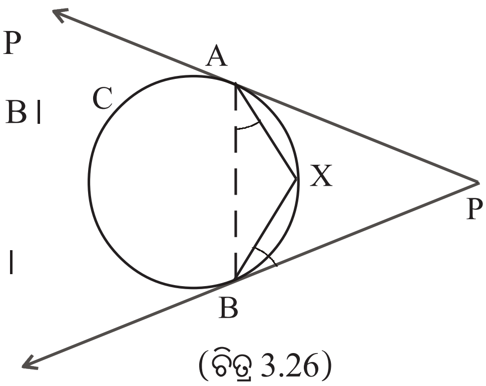
(a) (ଚିତ୍ର 3.25) (b)

ଚିତ୍ର 3.25 (a)ରେ $O_1O_2 = O_1P + O_2P$ [$\because O_1$-P-O_2]

ଚିତ୍ର 3.25 (b)ରେ $O_1O_2 = O_1P - O_2P$ [$\because O_1$-O_2-P]

ସ୍ପର୍ଶକ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତେକ ଉଦାହରଣ :

ଉଦାହରଣ -1 : ଏକ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରୁ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ରଶ୍ମି $\overrightarrow{PA}$ ଓ $\overrightarrow{PB}$ ର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ ଯଥାକ୍ରମେ A ଓ B । $m\angle APB = 42^0$ ହେଲେ A ଓ B ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ବିଶିଷ୍ଟ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଏକ କୋଣର ପରିମାଣ କେତେ ?



(ଚିତ୍ର 3.26)

ଦତ୍ତ : ଚିତ୍ର 3.26 ରେ ଥିବା ବୃତ୍ତ ABCର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଏବଂ $\overrightarrow{PA}$ ଓ $\overrightarrow{PB}$ ସ୍ପର୍ଶକ ରଶ୍ମିଦ୍ୱୟର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ ଯଥାକ୍ରମେ A ଓ B।

$\overset{\frown}{AXB}$ ହେଉଛି A ଓ B ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ବିଶିଷ୍ଟ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ ।

$\angle AXB$ ହେଉଛି $\overset{\frown}{AXB}$ ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଗୋଟିଏ କୋଣ ।

$m\angle APB = 42^0$ ।

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ : $m\angle AXB$

ଅଙ୍କନ : $\overline{AB}$ ଜ୍ୟା ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ ।

ସମାଧାନ : ସ୍ପର୍ଶକ $\overleftrightarrow{PB}$ ଓ $\overline{BX}$ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଜ୍ୟା ହେତୁ, $m\angle XBP = m\angle BAX$ (ଏକାନ୍ତର ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ) । ମନେକର $m\angle XBP = m\angle BAX = a^0$ ହେଉ ।

ସେହି କାରଣରୁ $m\angle XAP = m\angle ABX = b^0$ ହେଉ ।

$\therefore$ $m\angle PAB = (a+b)^0$ ଏବଂ $m\angle PBA = (a+b)^0$

ΔPAB ରେ, $m\angle PAB + m\angle PBA + m\angle APB = 180^0$

$\Rightarrow (a+b)^0 + (a+b)^0 + 42^0 = 180^0$

$\Rightarrow 2(a+b) = 180 - 42 \Rightarrow 2(a+b) = 138 \Rightarrow a+b = \frac{138}{2} = 69$ ... (1)

ΔAXB ରେ $m\angle AXB + m\angle XAB + m\angle XBA = 180^0$

$\Rightarrow m\angle AXB + a^0 + b^0 = 180^0 \Rightarrow m\angle AXB + 69^0 = 180^0$ [(1) ଅନୁଯାୟୀ]

$\Rightarrow m\angle AXB = 180^0 - 69^0 = 111^0$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ -2 : ଦୁଇଟି ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r_1 ଓ r_2 ଏକକ । ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟର ଏକ ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ଉପରିସ୍ଥ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ P ଓ Q ହେଲେ $\overline{PQ}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ଦତ୍ତ : ଚିତ୍ର 3.27 ରେ . $\overleftrightarrow{PQ}$ ହେଉଛି ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ଏକ ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ । $\overline{AP}$ ଓ $\overline{BQ}$ ହେଉଛନ୍ତି ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ । ମନେକର $AP= r_1$, $BQ= r_2$ ଏବଂ $r_1 \geq r_2$ ।

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ : $\overline{PQ}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ।

ଅଙ୍କନ : $\overline{BC} \perp \overline{AP}$ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ ।

ସମାଧାନ : $\angle APQ$ ଓ $\angle BQP$ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ସମକୋଣ

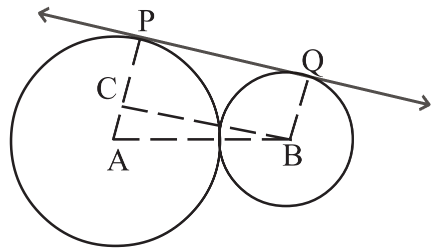
[$\overline{AP}$ ଓ $\overline{BQ}$ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ହେତୁ]

$\angle BCP$ ସମକୋଣ (ଅଙ୍କନ ଅନୁଯାୟୀ) ।

ଏଣୁ BCPQ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଚତୁର୍ଥ କୋଣ $\angle CBQ$ ମଧ୍ୟ ଏକ ସମକୋଣ । $\therefore$ BCPQ ଏକ ଆୟତଚିତ୍ର ।

ଫଳରେ $PQ = BC$ .... (1)

ଏବଂ $PC = BQ$ .... (2)



(ଚିତ୍ର 3.27)

$AP = r_1$, $BQ = r_2$ ଏବଂ $AC = AP - PC = r_1 - r_2$

ΔABC ରେ, $\angle ACB = 90^0$ [$\because \overline{BC} \perp \overline{AP}$ ଅଙ୍କନ]

$BC^2 = AB^2 - AC^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = 4r_1r_2$

[ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା = $r_1 + r_2$]

$\Rightarrow BC = \sqrt{4r_1r_2} = 2\sqrt{r_1r_2}$

$\therefore PQ = BC = 2\sqrt{r_1r_2}$ (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3

(କ - ବିଭାଗ)

1. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର :

(i) ଏକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O , ବୃତ୍ତ ବହିଃସ୍ଥ P କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଏବଂ $\overline{PT}$ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡ ହେଲେ, $m\angle OTP$ = ...

(ii) ଏକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O । ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଏବଂ $\overline{PX}$ ଓ $\overline{PY}$ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡ । $\angle XPY$ ଏକ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ ହେଲେ, $\angle XOY$ ଏକ .... କୋଣ ।

(iii) ଏକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O, ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଏବଂ $\overline{PT}$ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଏକ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡ ହେଲେ, $m\angle TOP + m\angle TPO$ = ...

(iv) ଏକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O , ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଏବଂ $\overline{PX}$ ଓ $\overline{PY}$ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡ ହେଲେ, (a) XOP କୋଣ ଓ ... କୋଣ ସମପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ;

(b) YPO କୋଣ ଓ .... କୋଣ ସମପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ ।

(v) ଏକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r ଏକକ । ବୃତ୍ତର ସମତଳରେ P ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଏବଂ OP ଓ r ମଧ୍ୟରେ .... ବୃହତ୍ତର ହେଲେ, P ବିନ୍ଦୁରୁ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡ ଅଙ୍କନ ସମ୍ଭବ ।

(vi) 5 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ 13 ସେ.ମି. ଦୂରରେ ଓ ବୃତ୍ତର ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ହେଲେ, $\overline{PT}$ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ .... ସେ.ମି.

(vii) କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ r ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବୃତ୍ତର ସମତଳରେ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରୁ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ t ସେ.ମି. ହେଲେ OP = ... ସେ.ମି. ।

(viii) ଦୁଇଟି ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତର (a) ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ସଂଖ୍ୟା = ... ଏବଂ

(b) ତିର୍ଯ୍ୟକ୍ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ସଂଖ୍ୟା = ...

(ix) ଦୁଇଟି ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତର

(a) ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ସଂଖ୍ୟା = ...

(b) ତିର୍ଯ୍ୟକ୍ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ସଂଖ୍ୟା = ...

(x) ପରସ୍ପର ବହିଃସ୍ଥ ହୋଇଥିବା ଦୁଇଟି ଅଣଛେଦୀ ବୃତ୍ତର

(a) ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ସଂଖ୍ୟା = ...

(b) ତିର୍ଯ୍ୟକ୍ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ସଂଖ୍ୟା = ...

(xi) ପରସ୍ପର ବହିଃସ୍ଥ ହୋଇ ନ ଥିବା ଦୁଇଟି ଅଣଛେଦୀ ବୃତ୍ତର

(a) ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ସଂଖ୍ୟା = ...

(b) ତିର୍ଯ୍ୟକ୍ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ସଂଖ୍ୟା = ...

(xii) Δ ABC ର AB = AC । Δ ABC ର ପରିବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ A ବିନ୍ଦୁରେ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ଉପରେ P ଏକ ବିନ୍ଦୁ, ଯେପରି P ଓ B ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ $\overline{AC}$ ର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

$m\angle PAC = 70^0$ ହେଲେ, $m\angle ABC$ = ...

(xiii) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 8 ସେ.ମି ହେଲେ ଏହାର ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ସ୍ପର୍ଶକ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତା .... ସେ.ମି. ।

(xiv) ଦୁଇଟି ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତା ହେଉଛି ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧମାନଙ୍କର .... ସହ ସମାନ ।

(xv) ଦୁଇଟି ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତା ହେଉଛି ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧମାନଙ୍କର .... ସଙ୍ଗେ ସମାନ ।

(xvi) ଏକ ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରେ ସରଳରେଖାଟି ସର୍ବାଧିକ ..... ବୃତ୍ତର ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ହୋଇପାରିବ ।

2. ଦତ୍ତ ଥିବା ଉକ୍ତି ଭୁଲଥିଲେ (ଏହାକୁ ଦତ୍ତ ଉକ୍ତିର ନାସ୍ତିବାଚକ ଉକ୍ତି (Negative Statement) ବ୍ୟବହାର ନ କରି) ସଂଶୋଧନ କର ।

(i) r ଏକକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବୃତ୍ତର L ରେଖା ଏକ ଛେଦକ ହେଲେ, ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ L ର ଦୂରତା = r ଏକକ ।

(ii) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ ବୃତ୍ତର ସମତଳରେ ବୃତ୍ତ ବହିସ୍ଥ କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ P । P ବିନ୍ଦୁରୁ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡ $\overline{PT}$ ହେଲେ ΔOPT ରେ $\angle POT$ ଏକ ସମକୋଣ ।

(iii) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟସାର୍ଦ୍ଧ r ଏକକ । ବୃତ୍ତର ସମତଳରେ ବୃତ୍ତ ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରୁ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡ $\overline{PT}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ t ଏକକ ଏବଂ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଠାରୁ P ର ଦୂରତା d ଏକକ ହେଲେ, $d^2 + r^2 = t^2$.

(iv) ଏକ ବୃତ୍ତର ସମତଳରେ ବୃତ୍ତ ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ରୁ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡ $\overline{PT}$; P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଏକ ଛେଦକ, ବୃତ୍ତଟିକୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ, ଯେପରି P-A-B । ତେବେ $PT^2 = PA \times AB$

(v) ଏକ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ Q ଠାରୁ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରିବ ।

(vi) ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ କେବଳ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ P ଅଛି, ଯେଉଁଠାରୁ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ହେବ ।

(vii) ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତା ସହ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧର ସମଷ୍ଟି ସମାନ ହେଲେ, ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟ ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶୀ ହେବେ ।

(viii) ଦୁଇଟି ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତା, ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ବ୍ୟସାର୍ଦ୍ଧ ଦ୍ୱୟର ପାର୍ଥକ୍ୟ ସହ ସମାନ ।

(ix) ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିଏ ଅନ୍ୟଟିର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେଲେ, ସେ ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତର ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ରହିବ ।

(x) ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁରେ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରୁଥିବା ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତର କେବଳ ଗୋଟିଏ ତିର୍ଯ୍ୟକ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ଥାଏ ।

(xi) ଦୁଇଟି ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶୀ ସ୍ପର୍ଶକବୃତ୍ତର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ, ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ନୁହେଁ ।

(xii) ଦୁଇଟି ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତର ସ୍ପର୍ଶ ବିନ୍ଦୁ, ଉଭୟ ବୃତ୍ତ ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସିଟିର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ନୁହେଁ ।

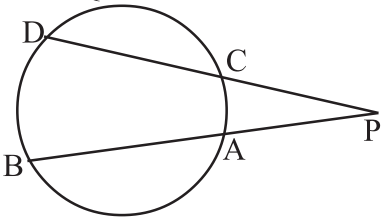
3. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ବିନ୍ଦୁ O ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ୮ ସେ.ମି. । ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଏବଂ PO=17 ସେମି. ହେଲେ, P ବିନ୍ଦୁରୁ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କେତେ ?

ଖ – ବିଭାଗ

4. ଦୁଇଟି ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 4.5 ସେ.ମି. ଓ 12.5 ସେ.ମି. । ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ଏକ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟକୁ P ଓ Q ବିନ୍ଦୁ ରେ ସ୍ପର୍ଶ କଲେ, $\overline{PQ}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କେତେ ?

5. ଦୁଇଟି ଅଣଛେଦୀ ବୃତ୍ତର ଏକ ତିର୍ଯ୍ୟକ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟକୁ P ଓ Q ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କରନ୍ତି । କେନ୍ଦ୍ର ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତା 20 ସେମି. ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଦ୍ୱୟ 7 ସେମି ଓ 5 ସେମି. ହେଲେ, PQ କେତେ ସେ.ମି. ?

6. ଚିତ୍ର - 3.28 ରେ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P । P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଗୋଟିଏ ଛେଦକ ଦତ୍ତ ବୃତ୍ତକୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ ଯେପରିକି P-A-B । P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଅନ୍ୟ ଏକ ଛେଦକ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତକୁ C ଓ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ ଯେପରିକି P-C-D । (i) ସ୍ପର୍ଶକ-ସମ୍ପୃକ୍ତ ଉପପାଦ୍ୟ ପ୍ରୟୋଗ କରି ପ୍ରମାଣ କର ।



(ଚିତ୍ର 3.28)

PA x PB = PC x PD

(ii) PA = 10 ସେ.ମି. PB = 16 ସେ.ମି. ଓ PD = 20 ସେ.ମି. ହେଲେ, CD ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

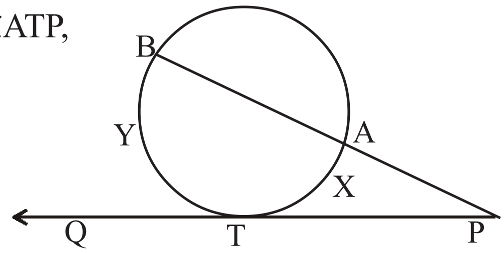
(iii) PA = 8 ସେ.ମି. ଓ AB = 10 ସେ.ମି. ହେଲେ, P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

7. ଚିତ୍ର 3.29 ରେ ଥିବା ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P । P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଏକ ଛେଦକ ପୂର୍ବୋକ୍ତ ବୃତ୍ତକୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । ଯେପରି P-A-B । P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ସ୍ପର୍ଶକରଶ୍ମିର ସ୍ପର୍ଶ ବିନ୍ଦୁ T ।

(i) $m\widehat{AXT} = 60^0$ ଏବଂ $m\widehat{BYT} = 130^0$ ହେଲେ $m\angle ATP$, $m\angle APT$, $m\angle ATB$ ଓ $m\angle BTQ$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ii) $m\angle BTQ = 2m\angle ATP$ ହେଲେ,

ପ୍ରମାଣ କର : (a) BT = TP (b) TA = AP



(ଚିତ୍ର 3.29)

(iii) PA = 8 ସେ.ମି. ଓ PT = 12 ସେ.ମି ହେଲେ, AB ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iv) PT = 2AP ଏବଂ AB = 18 ସେ.ମି. ହେଲେ, PT ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

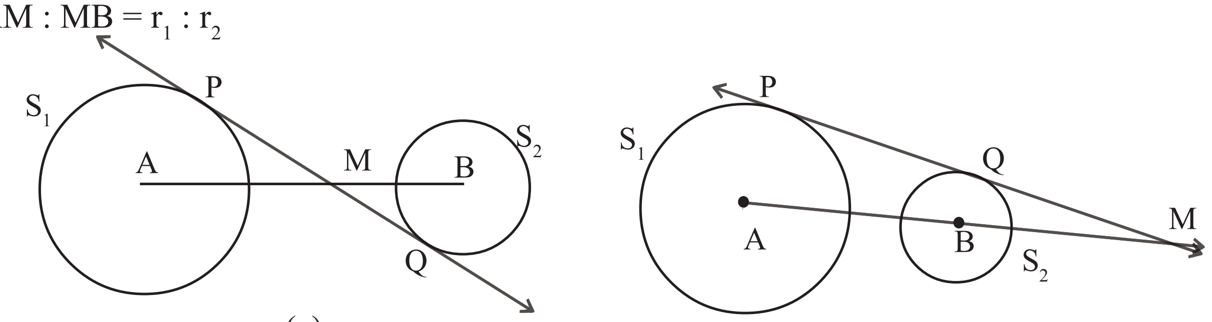
(v) PT = 2AP ଏବଂ PB = 24 ସେ.ମି. ହେଲେ, PT ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

8.(a) ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଏହାର ତିର୍ଯ୍ୟକ୍ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ଉପରିସ୍ଥ ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁରୁ ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡ ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ।

(b) ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ ଅନ୍ତସ୍ପର୍ଶୀ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ସେମାନଙ୍କର ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ଉପରିସ୍ଥ ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁରୁ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡ ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ।

9. ପରସ୍ପରଛେଦୀ ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତର ଛେଦବିନ୍ଦୁ A ଓ B । $\overleftrightarrow{AB}$ ଉପରିସ୍ଥ P ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଯେପରି A-B-P । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟ ପ୍ରତି P ବିନ୍ଦୁରୁ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡ ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ।

10. ଚିତ୍ର 3.30 ରେ r_1 ଓ r_2 ଏକକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତ S_1 ଓ S_2 ର କେନ୍ଦ୍ର ଯଥାକ୍ରମେ A ଓ B । ଚିତ୍ର 3.30 (a)ରେ ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟର ଗୋଟିଏ ତିର୍ଯ୍ୟକ୍ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ $\overline{AB}$ କୁ M ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $AM : MB = r_1 : r_2$



(a) (b)

(ଚିତ୍ର 3.30)

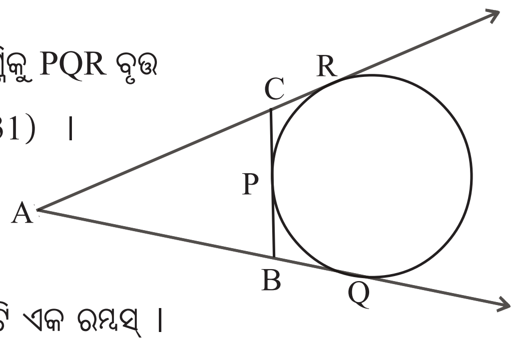
ଚିତ୍ର 3.30 (b) ରେ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ଗୋଟିଏ ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ $\overrightarrow{AB}$ କୁ M ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ, ଯେପରିକି A-B-M . । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $AM : BM = r_1 : r_2$ ।

11. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ $\overline{PQ}$ ଓ $\overline{PR}$ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି P ବିନ୍ଦୁରେ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ, $\overline{QR}$ ସହ ସମାନ୍ତର ।

12. ଦୁଇଟି ଏକକେନ୍ଦ୍ରିକ ବୃତ୍ତ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିକର ଏକ ଜ୍ୟା $\overline{AB}$ ଅନ୍ୟ ବୃତ୍ତକୁ P ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ P ବିନ୍ଦୁରେ $\overline{AB}$ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡିତ ହୁଏ ।

13. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, ବୃତ୍ତର ଦୁଇ ସମାନ୍ତର ସ୍ପର୍ଶକର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର ଏକ ବ୍ୟାସ ।

14. ΔABC ସମ୍ପୃକ୍ତ $\overline{BC}$ ବାହୁ, $\overrightarrow{AB}$ ରଶ୍ମି ଓ $\overrightarrow{AC}$ ରଶ୍ମିକୁ PQR ବୃତ୍ତ ଯଥାକ୍ରମେ P,Q ଓ R ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କରେ (ଚିତ୍ର 3.31) । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $AQ = \frac{1}{2}(AB + BC + AC)$



(ଚିତ୍ର 3.31)

15. ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ସମସ୍ତ ବାହୁକୁ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ସ୍ପର୍ଶ କଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରଟି ଏକ ରମ୍ବସ୍ ।

ଗ – ବିଭାଗ

16. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ ଏହି ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P । P ଠାରୁ ପୂର୍ବୋକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡ ଦ୍ୱୟ ହେଉଛନ୍ତି $\overline{PA}$ ଓ $\overline{PB}$ । $\overline{OP}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବୃତ୍ତଟିର ବ୍ୟାସ ସହ ସମାନ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ΔABP ଏକ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ।

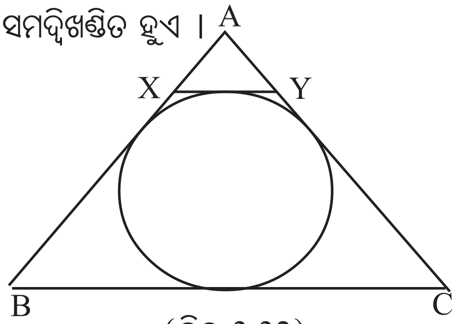
17. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ P ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକବିନ୍ଦୁ । $\overrightarrow{PT}$ ସ୍ପର୍ଶକରଶ୍ମିର ସ୍ପର୍ଶ ବିନ୍ଦୁ T, $\overline{OP}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ Q (ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ) ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ QT = QP ।

18. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଏବଂ ସ୍ପର୍ଶକ ରଶ୍ମି $\overrightarrow{PT}$ ର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ T । P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଏକ ରେଖା ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତକୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ, ଯେପରିକି P-A-B । $\overline{AB}$ ଉପରେ A ଓ B ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ C ଏକ ବିନ୍ଦୁ । ପ୍ରମାଣ କର: (a) $\overrightarrow{TC}$, $\angle ATB$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ହେଲେ, PC=PT

(b) PC = PT ହେଲେ $\overrightarrow{TC}$ ଦ୍ୱାରା $\angle ATB$ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡିତ ହୁଏ ।

19. ΔABC ର ବାହୁ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ଉପରେ ଯଥାକ୍ରମେ X ଓ Y ବିନ୍ଦୁ ଅବସ୍ଥିତ, ଯେପରିକି ΔABC ର ଅନ୍ତଃବୃତ୍ତକୁ $\overline{XY}$ ସ୍ପର୍ଶ କରିବ (ଚିତ୍ର 3.32) ।

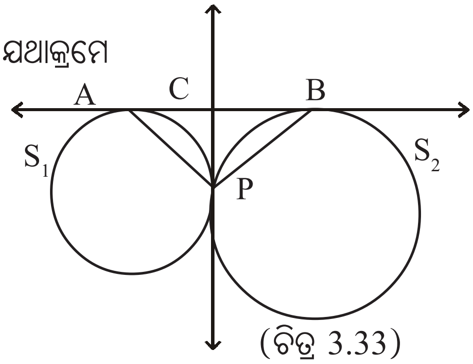
ପ୍ରମାଣ କର ଯେ AX + XY +YA= AB + AC – BC



(ଚିତ୍ର 3.32)

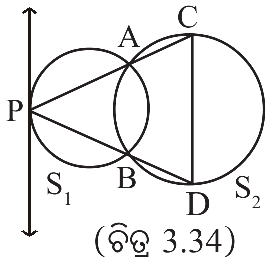
20. ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ S_1 ଓ S_2 ପରସ୍ପରକୁ P ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କରନ୍ତି । ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ଏକ ସରଳ ସାଧାରଣସ୍ପର୍ଶକ S_1 ଓ S_2 ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟକୁ ଯଥାକ୍ରମେ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କରନ୍ତି (ଚିତ୍ର - 3.33)। P ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ $\overleftrightarrow{AB}$ କୁ C ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କଲେ, ପ୍ରମାଣ କର : (a) AC = BC ଏବଂ

(b) $m\angle APB = 90^0$



(ଚିତ୍ର 3.33)

21. S_1 ଓ S_2 ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି (ଚିତ୍ର 3.34) । S_1 ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଦେଇ ଅଙ୍କିତ $\overrightarrow{PA}$ ଓ $\overrightarrow{PB}$ S_2 ବୃତ୍ତକୁ ଯଥାକ୍ରମେ C ଓ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ P ବିନ୍ଦୁରେ S_1 ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ, $\overline{CD}$ ସହ ସମାନ୍ତର ।



(ଚିତ୍ର 3.34)

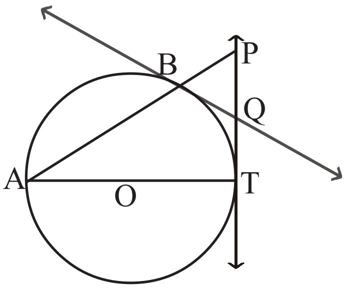
22. ଦୁଇଟି ପରସ୍ପର ଅଣଛେଦୀ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r_1 ଓ r_2 ଏକକ ଏବଂ $r_1 > r_2$ । ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର କେନ୍ଦ୍ର ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା d ଏକକ ।

(a) ଉଭୟ ବୃତ୍ତର ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ A ଓ B ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $AB^2 = d^2 – (r_1 – r_2)^2$ ଏବଂ

(b) ଉଭୟ ବୃତ୍ତର ତିର୍ଯ୍ୟକ୍ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ C ଓ D ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $CD^2 = d^2 – (r_1 + r_2)^2$

23. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଏବଂ P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ସ୍ପର୍ଶକ ରଶ୍ମି ଦ୍ୱୟର ସ୍ପର୍ଶ ବିନ୍ଦୁ ଯଥାକ୍ରମେ Q ଏବଂ R । $\overline{QR}$ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଛେଦିତ କ୍ଷୁଦ୍ର ଚାପର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ S ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\overrightarrow{QS}$ ଦ୍ୱାରା $\angle PQR$ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡିତ ହୁଏ ।

24. ଚିତ୍ର -3.35 ରେ ଥିବା ବୃତ୍ତର $\overline{AT}$ ଏକ ବ୍ୟାସ । ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଅନ୍ୟ ଏକ ବିନ୍ଦୁ B । $\overrightarrow{AB}$ ଏବଂ T ବିନ୍ଦୁରେ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ପରସ୍ପରକୁ P ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । B ବିନ୍ଦୁରେ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ $\overleftrightarrow{TP}$ କୁ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ Q ବିନ୍ଦୁ ହେଉଛି $\overline{PT}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ।



(ଚିତ୍ର 3.35)

25. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ $\overline{AB}$ ଏକ ବ୍ୟାସ । B ବିନ୍ଦୁରେ ବୃତ୍ତପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ଉପରେ C ଏପରି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଯେପରି $\overline{CA}$, ବୃତ୍ତକୁ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $AB^2 = AC \times AD$

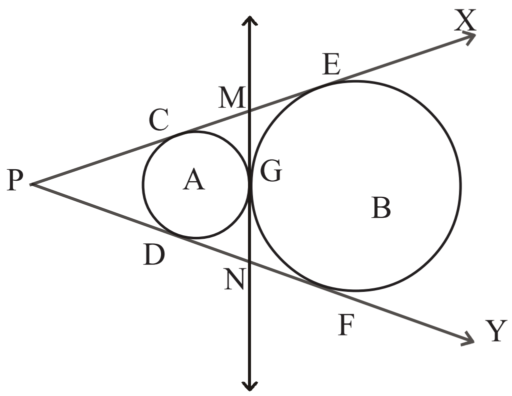
26. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ $\overline{AB}$ ଏକ ବ୍ୟାସ । B ବିନ୍ଦୁରେ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ଉପରେ C ଓ D ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ଯେପରି C-B-D । ଯଦି $\overline{CA}$ ଓ $\overline{DA}$ ଯଥାକ୍ରମେ ବୃତ୍ତକୁ P ଓ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $AC \times AP = AD \times AQ$

27. ଚିତ୍ର 3.36 ରେ S_1 ଓ S_2 ବୃତ୍ତ ଦୁଇଟି ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ଏବଂ G ସେମାନଙ୍କର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ । ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକରଶ୍ମି $\overrightarrow{PX}$ ଓ $\overrightarrow{PY}$ ଦ୍ୱୟର ସାଧାରଣ ମୂଳ ବିନ୍ଦୁ P। S_1 ଓ S_2 ବୃତ୍ତକୁ $\overrightarrow{PX}$ ଯଥାକ୍ରମେ C ଓ E ବିନ୍ଦୁରେ ଏବଂ $\overrightarrow{PY}$ ଯଥାକ୍ରମେ D ଓ F ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କରନ୍ତ ।

(a) ପ୍ରମାଣ କର :

(i) P, A, G, B ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ ଓ

(ii) CE = DF

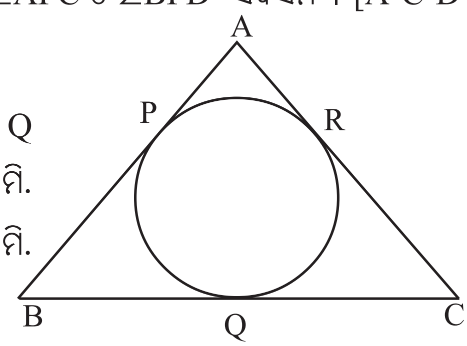


(ଚିତ୍ର 3.36)

(b) ଉଭୟ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ $\overrightarrow{PX}$ ଓ $\overrightarrow{PY}$ କୁ ଯଥାକ୍ରମେ M ଓ N ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କଲେ, ପ୍ରମାଣ କର : (i) PM = PN, (ii) MG = NG ।

28. ପରସ୍ପର ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶୀ ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ P । ଏକ ସରଳରେଖା ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତକୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଓ ଅନ୍ୟ ବୃତ୍ତକୁ C ଓ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ∠APC ଓ ∠BPD ସର୍ବସମ । [A-C-D ଓ A-D-C ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ପ୍ରମାଣ ଯୋଗ୍ୟ ।]

29. ΔABC ର ଅନ୍ତଃବୃତ୍ତ, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ଓ $\overline{CA}$ କୁ ଯଥାକ୍ରମେ P, Q ଓ R ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କରେ । (ଚିତ୍ର -3.37) BQ = 8 ସେ.ମି. CQ = 6 ସେ.ମି. ଏବଂ ΔABC ର ପରିସୀମା 36 ସେ.ମି. ହେଲେ, AB ଓ AC ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

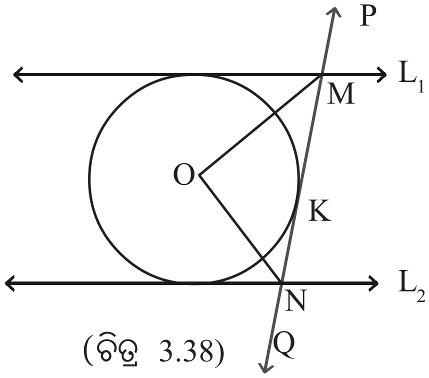


(ଚିତ୍ର 3.37)

30. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ ପରିଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ ABCD ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\angle AOB$ ଓ $\angle COD$ ପରସ୍ପର ପରିପୂରକ । $\angle BOC$ ଏବଂ $\angle AOD$ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସମ୍ପର୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

31. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଏକ ଜ୍ୟା $\overline{AB}$, ଏହି ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରେ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ସହ ସମାନ୍ତର ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ P ବିନ୍ଦୁ ଠାରେ $\widehat{APB}$ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡିତ ହୁଏ ।

32. ଚିତ୍ର 3.38 ରେ ଥିବା ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O, L_1 ଓ L_2 ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକ ଏବଂ $L_1 \parallel L_2$ । ବୃତ୍ତର K ବିନ୍ଦୁରେ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ $\overleftrightarrow{PQ}$, L_1 ଓ L_2 କୁ ଯଥାକ୍ରମେ M ଓ N ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\angle MON$ ଏକ ସମକୋଣ ।



(ଚିତ୍ର 3.38)

ଚତୁର୍ଥ ଅଧ୍ୟାୟ

ତ୍ରିକୋଣମିତି

(TRIGONOMETRY)

4.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ନବମ ଶ୍ରେଣୀରେ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$ ଓ $\text{cosec}\,\theta$ ର ସଂଜ୍ଞା, ଏହି ଅନୁପାତମାନଙ୍କୁ ନେଇ କେତେଗୁଡ଼ିଏ ସୂତ୍ର ଏବଂ $\theta = 30^0, 45^0$ ଓ 60^0 ପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ କେତକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ କୋଣର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତର ମୂଲ୍ୟ ସମ୍ପର୍କରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଥିଲା ।

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ଆମେ ଅନ୍ୟ କେତେକ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ମୂଲ୍ୟ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଜାଣିବା । ସାଧାରଣ ଜୀବନରେ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତର ପ୍ରୟୋଗାତ୍ମକ ବ୍ୟବହାର ବିଷୟରେ ମଧ୍ୟ ଜାଣିବା ।

ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ ଏକ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣର ପରିମାଣ θ ହେଉ । ଯେହେତୁ $\theta = 0^0$ କିମ୍ବା 90^0 ହେଲେ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ p (ଉଚ୍ଚତା), b (ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ) ଓ h (କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ) ର ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ଅନୁପାତ ମାଧ୍ୟମରେ $\sin\theta$, $\cos\theta$ ଆଦିର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ, ତେଣୁ ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ $\sin 0^0$, $\cos 0^0$, $\sin 90^0$ ଓ $\cos 90^0$ ଇତ୍ୟାଦିର ମୂଲ୍ୟଗୁଡ଼ିକୁ ସଂଜ୍ଞାରୂପେ ଗ୍ରହଣ କରାଯିବ ।

ସଂଜ୍ଞା : (1) $\sin 0^0 = 0$, $\cos 0^0 = 1$, $\tan 0^0 = \dfrac{\sin 0^0}{\cos 0^0} = 0$, $\sec 0^0 = \dfrac{1}{\cos 0^0} = 1$

$\dfrac{1}{0}$ ଅର୍ଥହୀନ ହୋଇଥିବାରୁ $\dfrac{\cos 0^0}{\sin 0^0}$ ଓ $\dfrac{1}{\sin 0^0}$ ଉଭୟ ଅର୍ଥହୀନ ।

ତେଣୁ $\cot 0^0$ ଓ $\text{cosec}\,0^0$ ସଂଜ୍ଞାଭୁକ୍ତ ନୁହେଁ (undefined) ।

(2) $\sin 90^0 = 1$, $\cos 90^0 = 0$, $\cot 90^0 = \dfrac{\cos 90^0}{\sin 90^0} = 0$, $\text{cosec}\,90^0 = \dfrac{1}{\sin 90^0} = 1$

$\tan 90^0$ ଓ $\sec 90^0$ ସଂଜ୍ଞାଭୁକ୍ତ ନୁହେଁ ।

ମନ୍ତବ୍ୟ : ତୁମେ ପୂର୍ବରୁ ଜାଣ ଯେ କୌଣସି କୋଣର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାଣ θ ହେଲେ ସଂଜ୍ଞାନୁସାରେ $0 < \theta < 180$ । ସୁତରାଂ $\theta = 0$ କିମ୍ବା $\theta = 180^0$ ଲେଖିବାର ଯଥାର୍ଥତା ନାହିଁ । କିନ୍ତୁ ଦୁଇଟି କୋଣର ପରିମାଣର ଅନ୍ତର 0^0 ଏବଂ ଯୋଗ 180^0 ହୋଇପାରେ । ପୁନଶ୍ଚ $\sin\theta$, $\cos\theta$ ଆଦି ଛଅଗୋଟି ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତକୁ ବ୍ୟାପକ ଅର୍ଥରେ ତଥା

ଉଚ୍ଚତର ଗଣିତରେ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନ (Trigonometric function) ରୂପେ ନିଆଯାଇଛି, ଯେଉଁ ଠାରେ θ ଏକ ଚଳରାଶି (variable ବା argument); ଅର୍ଥାତ୍ θ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ବାସ୍ତବ (real)ମୂଲ୍ୟ ଗ୍ରହଣ କରିପାରେ । ସୁତରାଂ $\sin 0^0$, $\cos 0^0$, $\sin 180^0$, $\cos 180^0$ ଇତ୍ୟାଦିର ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ମୂଲ୍ୟ ସଂଜ୍ଞାବଦ୍ଧ କରିବା ଆବଶ୍ୟକ ।

2. କୋଣର ପରିମାଣ ପାଇଁ θ ପରିବର୍ତ୍ତେ ଅନ୍ୟ ପ୍ରକାରର ସଂକେତ ଯଥା α (ଆଲଫା), β (ବିଟା) ଓ γ (ଗାମା) ଇତ୍ୟାଦି ମଧ୍ୟ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଏ ।

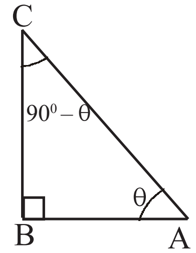
4.2 ଅନୁପୂରକ (Complementary) କୋଣର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ :

ଏକ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାଣ θ ହେଉ । ତେବେ ଯେଉଁ କୋଣ ଦ୍ୱୟର ପରିମାଣ θ ଓ $90^0 - \theta$, ସେମାନେ ପରସ୍ପର ଅନୁପୂରକ ଅଟନ୍ତି । θ ଓ $90^0 - \theta$ ର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ସମ୍ପର୍କକୁ ନିମ୍ନରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି ।

ଦତ୍ତ ଚିତ୍ର 4.1 ରେ ABC ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ । $m\angle B = 90^0$

ମନେକର $m\angle BAC = \theta \Rightarrow m\angle BCA = 90^0 - \theta$

ବର୍ତ୍ତମାନ $\sin\theta = \frac{BC}{AC}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{AC}{BC}$, $\cos\theta = \frac{AB}{AC}$, $\sec\theta = \frac{AC}{AB}$,



(ଚିତ୍ର - 4.1)

$\tan\theta = \frac{BC}{AB}$ ଏବଂ $\cot\theta = \frac{AB}{BC}$

ଦତ୍ତ ଚିତ୍ରରେ $\sin(90^0 - \theta) = \frac{AB}{AC}$ ମାତ୍ର $\cos\theta = \frac{AB}{AC}$

$\therefore \sin(90^0 - \theta) = \cos\theta$

ସେହିପରି $\cos(90^0 - \theta) = \frac{BC}{AC} = \sin\theta$, $\tan(90^0 - \theta) = \frac{AB}{BC} = \cot\theta$

$\cot(90^0 - \theta) = \frac{BC}{AB} = \tan\theta$, $\sec(90^0 - \theta) = \frac{AC}{BC} = \operatorname{cosec}\theta$ ଏବଂ

$\operatorname{cosec}(90^0 - \theta) = \frac{AC}{AB} = \sec\theta$

$\therefore 0^0 < \theta < 90^0$ ପାଇଁ ଆମେ ପାଇଲେ

ସୂତ୍ର A :

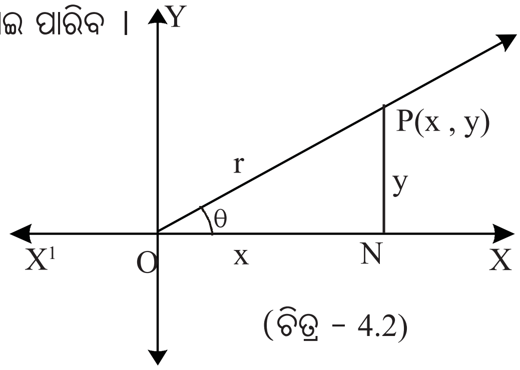
$\sin(90^0 - \theta) = \cos\theta$,	$\cos(90^0 - \theta) = \sin\theta$
$\tan(90^0 - \theta) = \cot\theta$,	$\cot(90^0 - \theta) = \tan\theta$
$\sec(90^0 - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$,	$\operatorname{cosec}(90^0 - \theta) = \sec\theta$

4.3. ସ୍ଥୂଳକୋଣମାନଙ୍କର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ :

ପୂର୍ବରୁ 0^0 ଠାରୁ 90^0 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ କୋଣମାନଙ୍କର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି । ଆଲୋଚିତ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ସଂଜ୍ଞାକୁ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତିର ବ୍ୟବହାର ଦ୍ୱାରା ବିକଳ୍ପ ଉପାୟରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରେ ଏବଂ ପ୍ରକୃତରେ ଏହି ବିକଳ୍ପ ସଂଜ୍ଞା ହିଁ ଉକ୍ତ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତଙ୍କ ପରିସର ବିସ୍ତାର ପାଇଁ ସହାୟକ ।

କାର୍ଟେଜୀୟ ସମତଳରେ P(x,y) ଏପରି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଯେପରି $\angle XOP$ ଏକ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ (ଚିତ୍ର 4.2) ।

$\overline{PN}$, P ବିନ୍ଦୁରୁ x- ଅକ୍ଷପ୍ରତି ଲମ୍ବ । ମନେକର $m\angle XOP = \theta$ । $\angle XOP$ ର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ O (ମୂଳବିନ୍ଦୁ) ଠାରୁ P ର ଦୂରତା = r ଏବଂ P ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (x, y) ବ୍ୟବହାର କରି PON ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ $m\angle PON = \theta$ ନିମନ୍ତେ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ ଗୁଡ଼ିକ ନିମ୍ନମତେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇ ପାରିବ ।



(ଚିତ୍ର - 4.2)

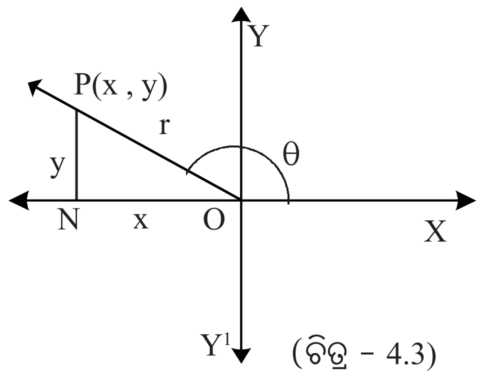
$$\sin\theta = \frac{PN}{OP} = \frac{\text{P ବିନ୍ଦୁର କୋଟି}}{r} = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{ON}{OP} = \frac{\text{P ବିନ୍ଦୁର ଭୁଜ}}{r} = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{PN}{ON} = \frac{\text{P ବିନ୍ଦୁର କୋଟି}}{\text{P ବିନ୍ଦୁର ଭୁଜ}} = \frac{y}{x}$$ ଇତ୍ୟାଦି ।

ଏଠାରେ P ବିନ୍ଦୁଟି ପ୍ରଥମ ପାଦରେ ଥିବାରୁ x ଓ y ଉଭୟ ଧନାତ୍ମକ ଏବଂ OP, r ଦୂରତା ସୂଚାଉ ଥିବାରୁ ଏହା ସର୍ବଦା ଧନାତ୍ମକ । ଯେଉଁଠାରେ $OP = r = \sqrt{x^2 + y^2}$

ସେହିପରି $\angle XOP$ ଏକ ସ୍ଥୂଳକୋଣ ହେଲେ (ଚିତ୍ର 4.3) ଅନୁରୂପ ଭାବେ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ ଗୁଡ଼ିକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରି ପାରିବା । ମାତ୍ର P ବିନ୍ଦୁଟି ଦ୍ୱିତୀୟ ପାଦରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେତୁ ଏହାର ଭୁଜ (= x) ଋଣାତ୍ମକ ଓ କୋଟି (= y) ଧନାତ୍ମକ । ମନେକର $m\angle XOP = \theta\ (0^0 < \theta < 180^0)$



(ଚିତ୍ର - 4.3)

$$\therefore\quad \sin\theta = \frac{\text{P ବିନ୍ଦୁର କୋଟି}}{r} = \frac{y}{r},$$ ଯାହାକି ଧନାତ୍ମକ,

$$\cos\theta = \frac{\text{P ବିନ୍ଦୁର ଭୁଜ}}{r} = \frac{x}{r}$$ ଓ ଏହା ଋଣାତ୍ମକ

$$\tan\theta = \frac{\text{P ବିନ୍ଦୁର କୋଟି}}{\text{P ବିନ୍ଦୁର ଭୁଜ}} = \frac{y}{x}$$ ଓ ଏହା ଋଣାତ୍ମକ

$$\cot\theta = \frac{\text{P ବିନ୍ଦୁର ଭୁଜ}}{\text{P ବିନ୍ଦୁର କୋଟି}} = \frac{x}{y}$$ ଓ ଏହା ଋଣାତ୍ମକ,

$$\sec\theta = \frac{r}{\text{P ବିନ୍ଦୁର ଭୁଜ}} = \frac{r}{x}$$ ଓ ଏହା ଋଣାତ୍ମକ ଏବଂ

$$\text{cosec}\,\theta = \frac{r}{\text{P ବିନ୍ଦୁର କୋଟି}} = \frac{r}{y}$$ ଓ ଏହା ଧନାତ୍ମକ

4.5 : $\theta = 180^0$ ନିମନ୍ତେ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ ଗୁଡ଼ିକର ମୂଲ୍ୟ :

କୌଣସି କୋଣର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ θ ଏବଂ $0 < \theta < 180$ ହେଲେ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତଗୁଡ଼ିକର ସଂଜ୍ଞା ଅନୁଚ୍ଛେଦ 4.2 ଏବଂ ଅନୁଚ୍ଛେଦ 4.3 ରୁ ତୁମେମାନେ ପାଇସାରିଛ । $\theta = 0^0$ କିମ୍ବା 90^0 କିମ୍ବା 180^0 ହେଲେ ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରୁ P (ଉଚ୍ଚତା), b (ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ) ଏବଂ h (କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ) ମାଧ୍ୟମରେ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତଗୁଡ଼ିକର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ । ତେଣୁ $\sin 0^0$, $\cos 0^0$; $\sin 90^0$, $\cos 90^0$ ଇତ୍ୟାଦିର ସଂଜ୍ଞା

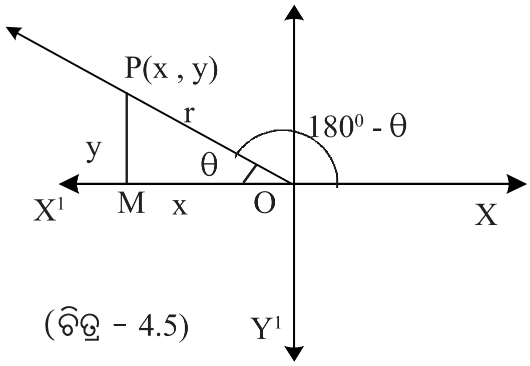
ନିରୂପଣ ଭଳି sin 180^0, cos 180^0 ଇତ୍ୟାଦିକୁ ସଂଜ୍ଞା ବଦ୍ଧ କରିବା । ଉଚ୍ଚତର ଗଣିତରେ ଉକ୍ତ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତଗୁଡ଼ିକୁ ବ୍ୟାପକୀକୃତ କରିପାରିବା ।

$\sin 180^0 = 0$	$\text{cosec } 180^0$ (ସଂଜ୍ଞାବିହୀନ)
$\cos 180^0 = -1$	$\sec 180^0 = -1$
$\tan 180^0 = 0$	$\cot 180^0$ (ସଂଜ୍ଞାବିହୀନ)

4.6 ଏକ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ θ ଓ ଏହାର ପରିପୂରକ କୋଣ

$(180^0 - \theta)$ ର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ବନ୍ଧ :

ଚିତ୍ର 4.5 ରେ ଗ୍ରାଫ୍ କାଗଜ ଉପରେ XOX' ଓ YOY' ଦୁଇଟି ଅକ୍ଷରେଖା ଏବଂ O ମୂଳବିନ୍ଦୁ । O ଠାରୁ r ଏକକ ଦୂରରେ P(x, y) ଏପରି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଯେପରି $m\angle POX = (180^0 - \theta)$ ହେଉ (θ ଏକ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ) । ତେବେ $m\angle POM = \theta$



(ଚିତ୍ର - 4.5)

$$\sin(180^0 - \theta) = \frac{y}{r} = \frac{PM}{OP} \text{ .... (1)}$$

ପୁନଶ୍ଚ OMP ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ,

$$\sin\theta = \frac{PM}{OP} \text{ .... (2)}$$

(1) ଓ (2) ରୁ $\sin(180^0 - \theta) = \sin\theta$

ସେହିପରି $\cos(180^0 - \theta) = \frac{x}{r}$ ଏବଂ ΔOMP ରେ $\cos\theta = \frac{OM}{OP}$ । ମାତ୍ର ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ x ଋଣାତ୍ମକ ହେତୁ $\cos(180^0 - \theta) = \frac{x}{r} = \frac{-OM}{OP}$ । ସୁତରାଂ $\cos(180^0 - \theta) = -\cos\theta$

ବର୍ତ୍ତମାନ $\tan(180^0 - \theta) = \frac{\sin(180^0 - \theta)}{\cos(180^0 - \theta)} = \frac{\sin\theta}{-\cos\theta} = -\tan\theta,$

$$\cot(180^0 - \theta) = \frac{\cos(180^0 - \theta)}{\sin(180^0 - \theta)} = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta} = -\cot\theta,$$

$$\sec(180^0 - \theta) = \frac{1}{\cos(180^0 - \theta)} = \frac{1}{-\cos\theta} = -\sec\theta \text{ ଏବଂ}$$

$$\text{cosec}(180^0 - \theta) = \frac{1}{\sin(180^0 - \theta)} = \frac{1}{\sin\theta} = \text{cosec }\theta$$

ଏହା ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇ ପାରିବ ଯେ ଉପରୋକ୍ତ ସୂତ୍ରଗୁଡ଼ିକ θ ର ମୂଲ୍ୟ 0^0 ରୁ 180^0 ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ମୂଲ୍ୟ ନିମନ୍ତେ (tan ଓ sec କ୍ଷେତ୍ରରେ $\theta \neq 90^0$ ପାଇଁ) ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ।

ସୂତ୍ର - B

$$\begin{array}{|l|}\hline \sin(180^0-\theta)=\sin\theta,\ 0^0\le\theta\le180^0 \\ \cos(180^0-\theta)=-\cos\theta,\ 0^0\le\theta\le180^0 \\ \tan(180^0-\theta)=-\tan\theta,\ 0^0\le\theta\le180^0\quad \theta\ne90^0 \\ \cot(180^0-\theta)=-\cot\theta,\ 0^0<\theta<180^0 \\ \sec(180^0-\theta)=-\sec\theta,\ \theta\ne90^0,\ 0^0\le\theta\le180^0 \\ \text{cosec}(180^0-\theta)=\text{cosec}\,\theta,\ 0^0<\theta<180^0 \\ \hline \end{array}$$

4.7 ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ θ ଓ ସ୍ଥୂଳକୋଣ $(90^0+\theta)$ ର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ପର୍କ :

ଯଦି θ ଗୋଟିଏ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ ହୁଏ $90^0+\theta$ ଏକ ସ୍ଥୂଳକୋଣ ହେବ । ଯେହେତୁ ଏହି ସ୍ଥୂଳକୋଣର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତରେ ମାନ $(180^0-\theta)$ ଓ $(90^0-\theta)$ କୋଣର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ସୂତ୍ର ସାହାଯ୍ୟରେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇ ପାରିବ, ତେଣୁ ଏହାର ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଜ୍ୟାମିତିକ ପ୍ରମାଣର ଆବଶ୍ୟକତା ନାହିଁ । $(90^0+\theta)$ କୋଣର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତର ମାନ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଭାବେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇ ପାରିବ ।

$$\sin(90^0+\theta)=\sin\{180^0-(90^0-\theta)\}=\sin(90^0-\theta)=\cos\theta$$
$$\cos(90^0+\theta)=\cos\{180^0-(90^0-\theta)\}=-\cos(90^0-\theta)=-\sin\theta$$
$$\tan(90^0+\theta)=\tan\{180^0-(90^0-\theta)\}=-\tan(90^0-\theta)=-\cot\theta$$
$$\cot(90^0+\theta)=\cot\{180^0-(90^0-\theta)\}=-\cot(90^0-\theta)=-\tan\theta$$
$$\sec(90^0+\theta)=\sec\{180^0-(90^0-\theta)\}=-\sec(90^0-\theta)=-\text{cosec}\,\theta$$
$$\text{cosec}(90^0+\theta)=\text{cosec}\{180^0-(90^0-\theta)\}=\text{cosec}(90^0-\theta)=\sec\theta$$

ସୂତ୍ର - C

$$\begin{array}{|l|}\hline \sin(90^0+\theta)=\cos\theta,\ 0^0\le\theta\le90^0 \\ \cos(90^0+\theta)=-\sin\theta,\ 0^0\le\theta\le90^0 \\ \tan(90^0+\theta)=-\cot\theta,\ 0^0<\theta\le90^0 \\ \cot(90^0+\theta)=-\tan\theta,\ 0^0\le\theta<90^0 \\ \sec(90^0+\theta)=-\text{cosec}\,\theta,\ 0<\theta\le90^0 \\ \text{cosec}(90^0+\theta)=\sec\theta,\ 0^0\le\theta<90^0 \\ \hline \end{array}$$

4.8 କେତକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ :

$\theta=30^0, 45^0, 60^0$ ପାଇଁ ବିଭିନ୍ନ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ମାନ ନିରୂପଣ କରାଯାଇଥିଲା । ଏମାନଙ୍କ ସାହାଯ୍ୟରେ ଏବଂ ପୂର୍ବ ଅନୁଚ୍ଛେଦରେ ବର୍ଣ୍ଣିତ ତଥ୍ୟମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା $\theta=120^0, 135^0$ ଓ 150^0 ପାଇଁ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ମାନ ସବୁ ମଧ୍ୟ ନିରୂପିତ ହୋଇପାରିବ ।

ଏହାର ଆଲୋଚନା ନିମ୍ନରେ କରାଯାଇଛି ।

(i) $\theta = \mathbf{120^0}$

ପୂର୍ବରୁ ଜଣା ଅଛି ଯେ $\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$ ଏବଂ $\tan 60^0 = \sqrt{3}$

$\therefore \sin 120^0 = \sin (180^0 - 60^0) = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 120^0 = \cos (180^0 - 60^0) = -\cos 60^0 = -\frac{1}{2}$

$\tan 120^0 = \tan (180^0 - 60^0) = -\tan 60^0 = -\sqrt{3}$

$\cot 120^0 = \frac{1}{\tan 120^0} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\sec 120^0 = \frac{1}{\cos 120^0} = -2$ ଏବଂ

$\text{cosec}\, 120^0 = \frac{1}{\sin 120^0} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

(ii) $\theta = \mathbf{135^0}$

ଏଠାରେ $\theta = 180^0 - 45^0$ ଏବଂ ପୂର୍ବରୁ ଜଣା ଅଛି ଯେ –

$\sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan 45^0 = 1$

$\therefore \sin 135^0 = \sin 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos 135^0 = -\cos 45^0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$;

$\tan 135^0 = -\tan 45^0 = -1$

[$\sin (180^0 - \theta)$, $\cos(180^0 - \theta)$, $\tan(180^0 - \theta)$ ର ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କରି]

$\cot 135^0 = \frac{1}{\tan 135^0} = -1$; $\sec 135^0 = \frac{1}{\cos 135^0} = -\sqrt{2}$

ଏବଂ $\text{cosec}\, 135^0 = \frac{1}{\sin 135^0} = \sqrt{2}$

(iii) $\theta = \mathbf{150^0}$

ପୂର୍ବରୁ ଜଣା ଅଛି $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$, $\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \sin 150^0 = \sin 30^0 = \frac{1}{2}$, $\cos 150^0 = -\cos 30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 150^0 = -\tan 30^0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cot 150^0 = \frac{1}{\tan 150^0} = -\sqrt{3}$

$\sec 150^0 = \frac{1}{\cos 150^0} = \frac{-2}{\sqrt{3}}$ ଏବଂ $\text{cosec}\, 150^0 = \frac{1}{\sin 150^0} = 2$

ଏ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଜଣା ଥିବା ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ମାନଗୁଡ଼ିକୁ ନିମ୍ନସ୍ଥ ସାରଣୀରେ ଉପସ୍ଥାପିତ କରାଯାଇଛି ।

ସାରଣୀ1

$\theta =$	sin	cos	tan	cot	sec	cosec
0^0	0	1	0	ସଂଜ୍ଞା ନାହିଁ	1	ସଂଜ୍ଞା ନାହିଁ
30^0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
45^0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60^0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
90^0	1	0	ସଂଜ୍ଞା ନାହିଁ	0	ସଂଜ୍ଞା ନାହିଁ	1
120^0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
135^0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	-1	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
150^0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
180^0	0	-1	0	ସଂଜ୍ଞା ନାହିଁ	-1	ସଂଜ୍ଞା ନାହିଁ

ଉଦାହରଣ - 1 : $\frac{\cos 30^0 + \sin 60^0}{1 + \cos 60^0 + \sin 30^0}$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $\frac{\cos 30^0 + \sin 60^0}{1 + \cos 60^0 + \sin 30^0} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (ଉତ୍ତର) ।

ଉଦାହରଣ - 2 : $\frac{\cos 70^0}{\sin 20^0} + \frac{\cos 55^0 . \operatorname{cosec} 35^0}{\tan 5^0 . \tan 25^0 . \tan 65^0 . \tan 85^0}$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $\frac{\cos 70^0}{\sin 20^0} + \frac{\cos 55^0 . \operatorname{cosec} 35^0}{\tan 5^0 . \tan 25^0 . \tan 65^0 . \tan 85^0}$

$$= \frac{\cos(90^0 - 20^0)}{\sin 20^0} + \frac{\cos(90^0 - 35^0) . \operatorname{cosec} 35^0}{\tan 5^0 . \tan 25^0 . \tan(90^0 - 25^0) . \tan(90^0 - 5^0)}$$

$$= \frac{\sin 20^0}{\sin 20^0} + \frac{\sin 35^0 . \operatorname{cosec} 35^0}{\tan 5^0 . \tan 25^0 . \cot 25^0 . \cot 5^0}$$

$$= 1 + \frac{\sin 35^0 \times \frac{1}{\sin 35^0}}{(\tan 5^0 \times \cot 5^0) \times (\tan 25^0 \times \cot 25^0)} = 1 + \frac{1}{1 \times 1} = 1+1 = 2$$ (ଉତ୍ତର) ।

ଉଦାହରଣ - 3 : ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $3\frac{\sin 62^0}{\cos 28^0} - \frac{\sec 42^0}{\operatorname{cosec} 48^0} = 2$

ସମାଧାନ : ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = $3\frac{\sin 62^0}{\cos 28^0} - \frac{\sec 42^0}{\operatorname{cosec} 48^0} = 3\frac{\sin(90^0 - 28^0)}{\cos 28^0} - \frac{\sec(90^0 - 48^0)}{\operatorname{cosec} 48^0}$

$= 3\frac{\cos 28^0}{\cos 28^0} - \frac{\operatorname{cosec} 48^0}{\operatorname{cosec} 48^0} = 3 - 1 = 2 =$ ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ - 4 : ଯଦି A ଓ B ପ୍ରତ୍ୟେକ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ ଏବଂ $\sin A = \cos B$ ହୁଏ
ତେବେ ପ୍ରମାଣକର ଯେ, $A + B = 90^0$

ସମାଧାନ : B ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ ହେତୁ $(90^0 - B)$ ମଧ୍ୟ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ $\sin A = \cos B \Rightarrow \sin A = \sin(90^0 - B)$

$\Rightarrow A = 90^0 - B \Rightarrow A + B = 90^0$ (ପ୍ରମାଣିତ)

[**ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ :** A ଓ B ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ ହେଲେ $\sin A = \sin B \Rightarrow A = B$ ଏବଂ ସେହିପରି $\cos A = \cos B \Rightarrow A = B$ ଇତ୍ୟାଦି । କିନ୍ତୁ A ଓ B ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସି ଗୋଟିଏ ସ୍ଥୁଳକୋଣ ହେଲେ ଏହା ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ ।

ଯେପରି : $\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 120^0$ କିନ୍ତୁ $60^0 \neq 120^0$ (ଉଚ୍ଚତର ଶ୍ରେଣୀରେ ଏ ବିଷୟରେ ଅଧିକ ଜାଣିବ)] ।

ଉଦାହରଣ - 5 : ସରଳ କର : $\frac{1+\sec(180^0 - A)}{1+\sec(90^0 + A)} \times \frac{1-\operatorname{cosec} A}{1-\sec A}$

ସମାଧାନ : $\frac{1+\sec(180^0 - A)}{1+\sec(90^0 + A)} \times \frac{1-\operatorname{cosec} A}{1-\sec A} = \frac{1-\sec A}{1-\operatorname{cosec} A} \times \frac{1-\operatorname{cosec} A}{1-\sec A} = 1$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 6 : $\operatorname{cosec}^2(97^0 + \alpha) - \cot^2(83^0 - \alpha)$ କୁ ସରଳ କର ।

ସମାଧାନ : $\operatorname{cosec}^2(97^0 + \alpha) - \cot^2(83^0 - \alpha)$

$= \operatorname{cosec}^2[90^0 + (7^0 + \alpha)] - \cot^2[90^0 - (7^0 + \alpha)]$

$= \sec^2(7^0 + \alpha) - \tan^2(7^0 + \alpha)$

$= 1$ (ଉତ୍ତର)

ବି.ଦ୍ର.: $\cot^2(83^0 - \alpha) = [\cot\{180^0 - (97^0 + \alpha)\}]^2 = [-\cot(97^0 + \alpha)]^2 = \cot^2(97^0 + \alpha)$ ନିଆଯାଇ ସରଳ କରାଯାଇପାରେ ।

ଉଦାହରଣ -7 : $\dfrac{\sin(180^0 - A).\sin(90^0 - A).\cot(90^0 + A)}{\tan(180^0 - A).\cos(90^0 + A).\text{cosec}(90^0 - A)}$ କୁ ସରଳ କର ।

ସମାଧାନ : $\dfrac{\sin(180^0 - A).\sin(90^0 - A).\cot(90^0 + A)}{\tan(180^0 - A).\cos(90^0 + A).\text{cosec}(90^0 - A)} = \dfrac{\sin A.\cos A.(-\tan A)}{-\tan A.(-\sin A).\sec A}$

$= \dfrac{-\sin A.\cos A.\tan A}{\tan A.\sin A.\sec A} = \dfrac{-\cos A}{\sec A} = -\cos^2 A$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ -8 : ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\tan 1^0 . \tan 2^0 . \tan 3^0$ .... $\tan 89^0 = 1$

ସମାଧାନ : ବାମପକ୍ଷ = $\tan 1^0 . \tan 2^0 . \tan 3^0$ .... $\tan 89^0$

$= \tan(90^0–89^0) . \tan(90^0–88^0) . \tan(90^0–87^0)$

.... $\tan(90^0–46^0) . \tan 45^0$ .... $\tan 87^0 . \tan 88^0 . \tan 89^0$

$= \cot 89^0 . \cot 88^0 . \cot 87^0$ .... $\cot 46^0 . \tan 45^0 . \tan 46^0$ ... $\tan 87^0 . \tan 88^0 . \tan 89^0$

$= (\cot 89^0 \times \tan 89^0) \times (\cot 88^0 \times \tan 88^0) \times (\cot 87^0 \times \tan 87^0)$

.... $\times (\cot 46^0 \times \tan 46^0) \times \tan 45^0$

$= 1 \times 1 \times 1 \times$ .... $\times 1 \times 1 = 1$ = ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ-9: Δ ABC ରେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $\sin\left(\dfrac{B+C}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{A}{2}\right)$

ସମାଧାନ : A, B ଏବଂ C ତ୍ରିଭୁଜର ତିନୋଟି କୋଣ ହେତୁ $A + B + C = 180^0$

ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = $\sin\left(\dfrac{B+C}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{A+B+C-A}{2}\right)$

$= \sin\left(\dfrac{180^0 - A}{2}\right) = \sin\left(90^0 - \dfrac{A}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{A}{2}\right)$ = ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 4 (a)

('କ' ବିଭାଗ)

1. **ବନ୍ଧନୀ ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟି ବାଛି ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।**

(a) $\sin 80^0 =$ .... $[\sin 10^0, \sin 20^0, \cos 10^0, \cos 20^0]$

(b) $\cos 65^0 =$ .... $[\sin 25^0, \sin 35^0, \cos 25^0, \cos 35^0]$

(c) $\sin 180^0 =$ .... $[1, -1, 0, \pm 1]$

(d) $\cos 90^0 =$ .... $[1, -1, 0, \pm 1]$

(e) $\cos 110^0 + \sin 20^0 =$ .... $[2 \cos 110^0, 2 \sin 20^0, 0, 1]$

(f) $\sin 75^0 - \cos 15^0 =$ .... $[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1]$

(g) $\sin 0^0 = ...$ [$\cos 0^0, \sin 90^0, \sin 180^0, \cos 180^0$]

(h) $\sin 15^0 + \cos 105^0 = ...$ [$0, 1, -1, \pm 1$]

(i) $\cos 121^0 + \sin 149^0 = ...$ [$1, -1, 0, \pm 1$]

(j) $\tan 102^0 - \cot 168^0 = ...$ [$0, -1, 1, \pm 1$]

2. $90^0 + \theta$ କିମ୍ବା $90^0 - \theta$ କିମ୍ବା $180^0 - \theta$, ର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କର ($0^0 < \theta < 90^0$) ।

(i) $\sin 111^0$ (ii) $\cos 122^0$ (iii) $\tan 99^0$ (iv) $\cot 101^0$

(v) $\sin 91^0$ (vi) $\operatorname{cosec} 93^0$ (vii) $\cos 128^0$ (viii) $\operatorname{cosec} 132^0$ (ix) $\cot 131^0$

3. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପଦଗୁଡ଼ିକୁ 0^0 ଏବଂ 45^0 କୋଣ ପରିମାଣ ମଧ୍ୟସ୍ଥ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

(i) $\cos 85^0 + \cot 85^0$ (ii) $\sin 75^0 + \tan 75^0$ (iii) $\cot 65^0 + \tan 49^0$

4. ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । i) $\dfrac{\sin 18^0}{\cos 72^0}$ ii) $\dfrac{\tan 26^0}{\cot 64^0}$ iii) $\dfrac{\sin 116^0}{\cos 26^0}$ iv) $\dfrac{\operatorname{cosec} 74^0}{\operatorname{cosec} 106^0}$ v) $\dfrac{\sin 28^0}{\cos 118^0}$

('ଖ' ବିଭାଗ)

5. ସରଳ କର :-

(i) $\operatorname{cosec} 31^0 - \sec 59^0$ (ii) $\sin(50^0 + \theta) - \cos(40^0 - \theta)$

(iii) $\dfrac{\cos^2 20^0 + \cos^2 70^0}{\sin^2 59^0 + \sin^2 31^0}$ (iv) $\tan(55^0 - \theta) - \cot(35^0 + \theta)$

(v) $\cos 1^0 . \cos 2^0 .... \cos 180^0$ (vi) $\left(\dfrac{\sin 27^0}{\cos 63^0}\right)^2 + \left(\dfrac{\cos 63^0}{\sin 27^0}\right)^2$

(vii) $\cot 112^0 . \cot 158^0$ (viii) $\cos^2(90^0 + \alpha) + \cos^2(180^0 - \alpha)$

(ix) $\sec^2(105^0 + \alpha) - \tan^2(75^0 - \alpha)$ (x) $\sin^2(110^0 + \alpha) + \cos^2(70^0 - \alpha)$

6. ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $\operatorname{cosec}^2 67^0 - \tan^2 23^0$ (ii) $\dfrac{\sin 51^0 + \sin 156^0}{\cos 39^0 + \cos 66^0}$

(iii) $\dfrac{\cos 68^0 + \sin 131^0}{\sin 22^0 + \cos 41^0}$ (iv) $\dfrac{\sin 162^0 + \cos 153^0}{\cos 72^0 - \cos 27^0}$

(v) $\dfrac{\cos 38^0 + \sin 120^0}{2\sin 52^0 + \sqrt{3}}$ (vi) $\dfrac{2\cos 67^0}{\sin 23^0} - \dfrac{\tan 40^0}{\cot 50^0} - \sin 90^0$

(vii) $\dfrac{\sec 61^0 + \operatorname{cosec} 120^0}{\sqrt{3}\operatorname{cosec} 29^0 + 2}$

7. ପ୍ରମାଣ କର :

(i) $\cos(90^0 - \theta) . \text{cosec}(180^0 - \theta) = 1$

(ii) $\dfrac{\cos 29^0 + \sin 159^0}{\sin 61^0 + \cos 69^0} = 1$ (iii) $\sin^2 70^0 + \cos^2 110^0 = 1$

(iv) $\sin^2 110^0 + \sin^2 20^0 = 1$ (v) $\sec^2\theta + \text{cosec}^2(180^0 - \theta) = \sec^2\theta . \text{cosec}^2\theta$

(vi) $2 \sin \theta . \sec(90^0 + \theta) . \sin 30^0 . \tan 135^0 = 1$

8. ପ୍ରମାଣ କର :

(i) $\cos^2 135^0 - 2\sin^2 180^0 + 3\cot^2 150^0 - 4\tan^2 120^0 = \dfrac{-5}{2}$

(ii) $\tan 30^0 . \tan 135^0 . \tan 150^0 . \tan 45^0 = \dfrac{1}{3}$

(iii) $\dfrac{\sec^2 180^0 + \tan 150^0}{\text{cosec}^2 90^0 + \cot 120^0} = 1$

(iv) $\sin^2 135^0 + \cos^2 120^0 - \sin^2 120^0 + \tan^2 150^0 = \dfrac{1}{3}$

('ଗ' ବିଭାଗ)

9. ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର :

(i) $\tan 10^0 \times \tan 20^0 \times \tan 30^0 \times .... \times \tan 70^0 \times \tan 80^0$

(ii) $\cot 12^0 . \cot 38^0 . \cot 52^0 . \cot 60^0 . \cot 78^0$

(iii) $\tan 5^0 . \tan 15^0 . \tan 45^0 . \tan 75^0 . \tan 85^0$

10. ପ୍ରମାଣ କର :

(i) $\sin 120^0 + \tan 150^0 . \cos 135^0 = \dfrac{3+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$

(ii) $\dfrac{\sec^2 180^0 + \tan 150^0}{\text{cosec}^2 90^0 - \cot 120^0} = 2 - \sqrt{3}$

(iii) $\dfrac{\sec^2 180^0 + \tan 45^0}{\text{cosec}^2 90^0 - \cot 120^0} = 3 - \sqrt{3}$

11. ସରଳ କର :

(i) $\sin(180^0 - \theta) . \cos(90^0 + \theta) + \sin(90^0 + \theta) . \cos(180^0 - \theta)$

(ii) $\dfrac{\cos(90^0 - A) . \sec(180^0 - A) . \sin(180^0 - A)}{\sin(90^0 + A) . \tan(90^0 + A) . \text{cosec}(90^0 + A)}$

12. Δ ABC ରେ $m\angle B = 90^0$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $\sin^2 A + \sin^2 C = 1$

13. Δ ABC ରେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $\cos(A+B) + \sin C = \sin(A + B) - \cos C$ ।

14. A ଓ B ଦୁଇଟି ପରସ୍ପର ଅନୁପୂରକ କୋଣ ହେଲେ $\sin A . \cos B + \cos A . \sin B$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

15. ABCD ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ ହେଲେ $\tan A + \tan C$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

16. ପ୍ରମାଣ କର : $\dfrac{\sin^2 135^0 + \cos^2 120^0 - \sin^2 150^0 + \tan^2 150^0}{\sin^2 120^0 - \cos^2 150^0 + \tan^2 120^0 + \tan^2 135^0 + \cos 180^0} = \dfrac{5}{18}$

17. ପ୍ରମାଣ କର : $\dfrac{5\sin^2 150^0 + \cos^2 45^0 + 4\tan^2 120^0}{2\sin 30^0 . \cos 60^0 - \tan 135^0} = \dfrac{55}{6}$

4.9. ମିଶ୍ରକୋଣର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ (Trigonometrical ratios of compound angles) :

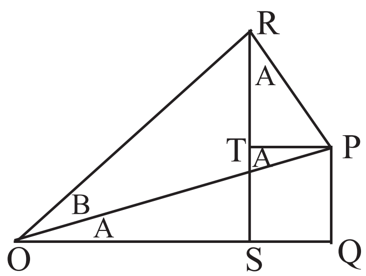
ଯଦି A ଓ B ଉଭୟ ଚଳରାଶି ଓ $\theta = A + B$ ବା $A - B$ ହୁଏ, ତେବେ θ ର ମୂଲ୍ୟ ଉଭୟ A ଓ B ଉପରେ ନିର୍ଭର କରିବ । A ଓ B ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସି ଗୋଟିଏ ବା ଉଭୟ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହେଲେ θ ମଧ୍ୟ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ମୂଲ୍ୟ ଗ୍ରହଣ କରିପାରେ । ଏ ପରିସ୍ଥିତିରେ θ ଅର୍ଥାତ୍ $A + B$ ବା $A - B$ କୁ ଯୌଗିକ ଚଳ (Compound argument) କୁହାଯାଏ ।

ଯୌଗିକ ଚଳ ପାଇଁ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନର କେତେଗୁଡ଼ିଏ ବିଶେଷ ଧର୍ମ ରହିଛି । ସେଥି ମଧ୍ୟରୁ କେତେକ ପ୍ରମୁଖ ଧର୍ମକୁ ସୂତ୍ର ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କରିବା ।

ସୂତ୍ର : $\sin(A + B) = \sin A . \cos B + \cos A . \sin B$ .... (1)

ପ୍ରମାଣ : ଚିତ୍ର 4.6 ରେ $\angle QOP$ ଓ $\angle POR$ ର ପରିମାଣ ଯଥାକ୍ରମେ A ଓ B, ତେଣୁ $\angle QOR$ ର ପରିମାଣ $A + B$ ଅଟେ ।

$\overline{RS} \perp \overline{OQ}$, $\overline{RP} \perp \overline{OP}$ ଏବଂ $\overline{PT} \perp \overline{RS}$, $\overline{PQ} \perp \overline{OQ}$



(ଚିତ୍ର 4.6)

ଅଙ୍କନ ଅନୁଯାୟୀ PQST ଏକ ଆୟତଚିତ୍ର ଅଟେ ।

ତେଣୁ $\overline{PT} \parallel \overline{OQ}$ ଏବଂ

$m\angle TPO = m\angle POQ = A$ (ଏକାନ୍ତର କୋଣ) .... (i)

RTP ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ $m\angle PRT + m\angle TPR = 90^0$

$\overline{RP} \perp \overline{OP}$ ହେତୁ $m\angle TPO + m\angle TPR = 90^0$

$\therefore m\angle PRT + m\angle TPR = m\angle TPO + m\angle TPR$

ତେଣୁ $m\angle PRT = m\angle TPO = A$ [(i) ଅନୁଯାୟୀ] .... (ii)

$\therefore \sin(A + B) = \dfrac{RS}{OR} = \dfrac{RT + TS}{OR} = \dfrac{RT + PQ}{OR} = \dfrac{PQ}{OR} + \dfrac{RT}{OR}$ ($\because TS = PQ$)

$= \dfrac{PQ}{OP} . \dfrac{OP}{OR} + \dfrac{RT}{RP} . \dfrac{RP}{OR}$

$= \sin\angle QOP \cdot \cos\angle POR + \cos\angle PRT \cdot \sin\angle POR$

$= \sin A. \cos B + \cos A . \sin B$

[$\because m\angle QOP = A = m\angle PRT$ ...... (ii)] (ପ୍ରମାଣିତ)

ମନ୍ତବ୍ୟ : (i) sin A କୁ sin m∠QOP ଅଥବା sin m∠PRT ନ ଲେଖି sin ∠QOP ଅଥବା sin∠PRT ଲେଖାଯାଏ । ସେହିପରି cos A କୁ cos m∠QOP ଅଥବା cos m∠PRT ନ ଲେଖି cos∠QOP ଅଥବା cos∠PRT ଲେଖାଯାଏ । ଅନ୍ୟାନ୍ୟ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ ପାଇଁ ମଧ୍ୟ ଏହି ପ୍ରଥା ଅନୁସୃତ ହୁଏ ।

(2) ∠PRT ଓ ∠QOP ସମପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ ହୋଇଥିବାରୁ ଆମେ PRT ବା QOP ଯେକୌଣସି ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରୁ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତଗୁଡ଼ିକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବା । ତ୍ରିଭୁଜଦ୍ୱୟ ସଦୃଶ ହୋଇଥିବାରୁ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଅନୁପାତଗୁଡ଼ିକ ସମାନ ଅଟନ୍ତି – ଏକଥା ସଦୃଶ ତ୍ରିଭୁଜ ପ୍ରସଙ୍ଗରେ ଆଲୋଚିତ ହୋଇଛି ।

ସୂତ୍ର : $\cos(A+B) = \cos A . \cos B - \sin A . \sin B$ ..... (2)

ପ୍ରମାଣ : ଚିତ୍ର 4.6 ରୁ $\cos(A+B) = \frac{OS}{OR} = \frac{OQ-SQ}{OR} = \frac{OQ-TP}{OR}$

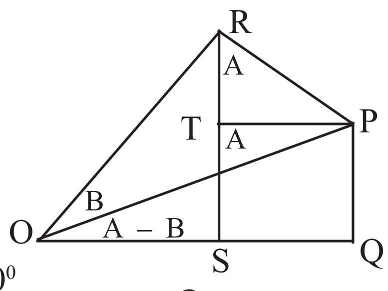
$= \frac{OQ}{OR} - \frac{TP}{OR} = \frac{OQ}{OP} \cdot \frac{OP}{OR} - \frac{TP}{RP} \cdot \frac{RP}{OR}$

$= \cos A . \cos B - \sin A . \sin B$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ସୂତ୍ର : $\sin(A - B) = \sin A . \cos B - \cos A . \sin B$ ....(3)

ପ୍ରମାଣ : ଚିତ୍ର 4.7 ରେ $m\angle QOR = A$, $m\angle POR = B$, ତେଣୁ $\angle QOP = A - B$

$\overline{RS} \perp \overline{OQ}$, $\overline{PR} \perp \overline{OR}$, $\overline{PT} \perp \overline{RS}$ ଓ $\overline{PQ} \perp \overline{OQ}$



(ଚିତ୍ର 4.7)

ଅଙ୍କନ ଅନୁଯାୟୀ PQST ଏକ ଆୟତଚିତ୍ର ।

ତେଣୁ $PQ = TS$ ଓ $SQ = TP$

∠ROS ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ $m\angle ROS + m\angle ORS = 90^0$

ପୁନଶ୍ଚ $\overline{PR} \perp \overline{OR}$ ହେତୁ $m\angle PRT + m\angle ORS = 90^0$

$\therefore m\angle ROS = m\angle PRT = A$ ($\because m\angle ROS = m\angle QOR = A$)

$\sin(A - B) = \sin\angle QOP = \frac{PQ}{OP} = \frac{TS}{OP}$ ($\because PQ = TS$)

$$= \frac{RS - RT}{OP} = \frac{RS}{OP} - \frac{RT}{OP} = \frac{RS}{OR} \cdot \frac{OR}{OP} - \frac{RT}{RP} \cdot \frac{RP}{OP}$$

$= \sin\angle ROS \;.\; \cos\angle POR \;-\; \cos\angle PRT \;.\; \sin\angle POR$

$= \sin A \;.\; \cos B \;-\; \cos A \;.\; \sin B$

($\because$ $m\angle ROS = m\angle PRT = A$ ଓ $m\angle POR = B$) (ପ୍ରମାଣିତ)

ସୂତ୍ର : $\cos(A - B) = \cos A . \cos B + \sin A . \sin B$ ....(4)

ପ୍ରମାଣ : ଚିତ୍ର 4.7 ରେ $\cos(A - B) = \cos\angle QOP$

$$= \frac{OQ}{OP} = \frac{OS + SQ}{OP} = \frac{OS + TP}{OP} \;(\because\; SQ = TP)$$

$$= \frac{OS}{OP} + \frac{TP}{OP} = \frac{OS}{OR} \cdot \frac{OR}{OP} + \frac{TP}{RP} \cdot \frac{RP}{OP}$$

$= \cos\angle ROS \;.\; \cos\angle POR \;+\; \sin\angle PRT \,.\, \sin\angle POR$

$= \cos A . \cos B + \sin A . \sin B$

($\because$ $m\angle ROS = m\angle PRT = A$ ଓ $m\angle POR = B$) (ପ୍ରମାଣିତ)

ସୂଚନା : ସୂତ୍ର -1ରୁ ସୂତ୍ର - 4 ଅତ୍ୟନ୍ତ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ଓ ଏହାକୁ ସ୍ମରଣ ରଖିବା ବାଞ୍ଛନୀୟ; କାରଣ ଏହାପରେ ଆଲୋଚିତ ହେବାକୁ ଥିବା ବିଷୟବସ୍ତୁ ପାଇଁ ଏହି ଚାରିଗୋଟି ସୂତ୍ର ହିଁ ଆଧାର । ଏହି ସୂତ୍ରଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରମାଣ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ ଆଧାରିତ ହୋଇଥିଲେ ହେଁ A ଓ B ର ଯେକୌଣସି ମାନ ପାଇଁ ସୂତ୍ରଗୁଡ଼ିକ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ – ଏହାର ପ୍ରମାଣ ଉଚ୍ଚତର ଶ୍ରେଣୀରେ ଦିଆଯିବ ।

ଉପରୋକ୍ତ ସୂତ୍ରଗୁଡ଼ିକ ସାହାଯ୍ୟରେ $\tan(A \pm B)$ ଏବଂ $\cot(A \pm B)$ର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନର ସୂତ୍ର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବା ।

ଉଦାହରଣ :-10

(i) $\tan(A + B) = \dfrac{\sin(A + B)}{\cos(A + B)} = \dfrac{\sin A.\cos B + \cos A.\sin B}{\cos A.\cos B - \sin A.\sin B}$

$$= \frac{\dfrac{\sin A.\cos B + \cos A.\sin B}{\cos A.\cos B}}{\dfrac{\cos A.\cos B - \sin A.\sin B}{\cos A.\cos B}}$$ (ଲବ ଓ ହରକୁ cosA .cosB ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରାଗଲା)

$$= \frac{\dfrac{\sin A.\cos B}{\cos A.\cos B} + \dfrac{\cos A.\sin B}{\cos A.\cos B}}{\dfrac{\cos A.\cos B}{\cos A.\cos B} - \dfrac{\sin A.\sin B}{\cos A.\cos B}}$$

$$= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \, . \, \tan B}$$

$$\therefore \ \mathbf{\tan (A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \, . \, \tan B}}$$

(ii) $\tan (A - B) = \dfrac{\sin(A - B)}{\cos(A - B)} = \dfrac{\sin A.\cos B - \cos A.\sin B}{\cos A.\cos B + \sin A.\sin B}$

$$= \frac{\dfrac{\sin A.\cos B - \cos A.\sin B}{\cos A.\cos B}}{\dfrac{\cos A.\cos B + \sin A.\sin B}{\cos A.\cos B}}$$ (ଲବ ଓ ହରକୁ cosA .cosB ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରାଗଲା)

$$= \frac{\dfrac{\sin A.\cos B}{\cos A.\cos B} - \dfrac{\cos A.\sin B}{\cos A.\cos B}}{\dfrac{\cos A.\cos B}{\cos A.\cos B} + \dfrac{\sin A.\sin B}{\cos A.\cos B}}$$

$$= \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \, . \, \tan B}$$

$$\therefore \ \mathbf{\tan (A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \, . \, \tan B}}$$

(iii) $\cot (A + B) = \dfrac{\cos(A + B)}{\sin(A + B)} = \dfrac{\cos A.\cos B - \sin A.\sin B}{\sin A.\cos B + \cos A.\sin B}$

$$= \frac{\dfrac{\cos A.\cos B - \sin A.\sin B}{\sin A.\sin B}}{\dfrac{\sin A.\cos B + \cos A.\sin B}{\sin A.\sin B}} = \frac{\dfrac{\cos A.\cos B}{\sin A.\sin B} - \dfrac{\sin A.\sin B}{\sin A.\sin B}}{\dfrac{\sin A.\cos B}{\sin A.\sin B} + \dfrac{\cos A.\sin B}{\sin A.\sin B}}$$

$$= \frac{\cot A.\cot B - 1}{\cot B + \cot A}$$

$$\therefore \ \mathbf{\cot (A + B) = \frac{\cot A.\cot B - 1}{\cot B + \cot A}}$$

(iv) $\cot (A - B) = \dfrac{\cos(A - B)}{\sin(A - B)} = \dfrac{\cos A.\cos B + \sin A.\sin B}{\sin A.\cos B - \cos A.\sin B}$

$$= \frac{\dfrac{\cos A.\cos B + \sin A.\sin B}{\sin A.\sin B}}{\dfrac{\sin A.\cos B - \cos A.\sin B}{\sin A.\sin B}} = \frac{\dfrac{\cos A.\cos B}{\sin A.\sin B} + \dfrac{\sin A.\sin B}{\sin A.\sin B}}{\dfrac{\sin A.\cos B}{\sin A.\sin B} - \dfrac{\cos A.\sin B}{\sin A.\sin B}}$$

$$= \frac{\cot A.\cot B + 1}{\cot B - \cot A} \qquad \therefore \ \mathbf{\cot (A - B) = \frac{\cot A.\cot B + 1}{\cot B - \cot A}}$$

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ଆଲୋଚିତ ସୂତ୍ରଗୁଡ଼ିକୁ ନେଇ ନିମ୍ନ ଉପ-ସୂତ୍ରଗୁଡ଼ିକୁ ନିଜେ ସ୍ଥିର କର ।

(a) $\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A \cdot \cos B$

(b) $\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A \cdot \sin B$

(c) $\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A \cdot \cos B$

(d) $\cos(A-B) - \cos(A+B) = 2\sin A \cdot \sin B$

ଉଦାହରଣ - 11 : $\sin 15^0$ ଓ $\tan 105^0$ ର ମାନ ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : $\sin 15^0 = \sin(45^0 - 30^0)$

$= \sin 45^0 \cdot \cos 30^0 - \cos 45^0 \cdot \sin 30^0$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ (ଉତ୍ତର)

$\tan 105^0 = \tan(60^0 + 45^0) = \frac{\tan 60^0 + \tan 45^0}{1 - \tan 60^0 . \tan 45^0} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3} \times 1} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$

$= \frac{(\sqrt{3}+1)(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = \frac{3+1+2\sqrt{3}}{1-3} = \frac{4+2\sqrt{3}}{-2} = -2-\sqrt{3}$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 12 : ପ୍ରମାଣ କର : $\frac{\sin(A+B)}{\cos A . \cos B} = \tan A + \tan B$

ସମାଧାନ : ବାମପକ୍ଷ $= \frac{\sin(A+B)}{\cos A . \cos B} = \frac{\sin A . \cos B + \cos A . \sin B}{\cos A . \cos B}$

$= \frac{\sin A . \cos B}{\cos A . \cos B} + \frac{\cos A . \sin B}{\cos A . \cos B}$

$= \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B} = \tan A + \tan B =$ ଦକ୍ଷିଣପକ୍ଷ (ପ୍ରମାଣିତ) ।

ଉଦାହରଣ - 13 : ପ୍ରମାଣ କର : $\frac{\cos 16^0 + \sin 16^0}{\cos 16^0 - \sin 16^0} = \tan 61^0$

ସମାଧାନ : ଦକ୍ଷିଣପକ୍ଷ $= \tan 61^0 = \tan(45^0 + 16^0)$

$= \frac{\tan 45^0 + \tan 16^0}{1 - \tan 45^0 . \tan 16^0} = \frac{1 + \tan 16^0}{1 - \tan 16^0} = \frac{1 + \frac{\sin 16^0}{\cos 16^0}}{1 - \frac{\sin 16^0}{\cos 16^0}} = \frac{\frac{\cos 16^0 + \sin 16^0}{\cos 16^0}}{\frac{\cos 16^0 - \sin 16^0}{\cos 16^0}}$

$= \frac{\cos 16^0 + \sin 16^0}{\cos 16^0 - \sin 16^0} =$ ବାମପକ୍ଷ (ପ୍ରମାଣିତ) ।

ଉଦାହରଣ - 14 : ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $\tan 70^0 . \tan 65^0 - \tan 70^0 - \tan 65^0 = 1$

ସମାଧାନ : $70^0 + 65^0 = 135^0 \Rightarrow \tan(70^0 + 65^0) = \tan 135^0$

$$\Rightarrow \frac{\tan 70^0 + \tan 65^0}{1 - \tan 70^0 . \tan 65^0} = -1$$

$\Rightarrow -1 + \tan 70^0 . \tan 65^0 = \tan 70^0 + \tan 65^0$

$\Rightarrow \tan 70^0 . \tan 65^0 - \tan 70^0 - \tan 65^0 = 1$

$\Rightarrow$ ବାମପକ୍ଷ = ଦକ୍ଷିଣପକ୍ଷ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ - 15 : $A+B+C = 180^0$ ହେଲେ,

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A . \tan B . \tan C$

ସମାଧାନ : $A+B+C = 180^0 \Rightarrow A+B = 180^0 - C$

$$\Rightarrow \tan(A+B) = \tan(180^0 - C) \Rightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A . \tan B} = -\tan C$$

$\Rightarrow \tan A + \tan B = -\tan C + \tan A . \tan B . \tan C$

$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A . \tan B . \tan C \Rightarrow$ ବାମପକ୍ଷ = ଦକ୍ଷିଣପକ୍ଷ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ - 16 : ପ୍ରମାଣ କର : $\cos 70^0 + \cos 50^0 = \sin 80^0$

ସମାଧାନ : ବାମପକ୍ଷ = $\cos 70^0 + \cos 50^0$

$= \cos(60^0 + 10^0) + \cos(60^0 - 10^0)$

$= \cos 60^0 . \cos 10^0 - \sin 60^0 . \sin 10^0 + \cos 60^0 . \cos 10^0 + \sin 60^0 . \sin 10^0$

$= 2\cos 60^0 . \cos 10^0 = 2 \times \frac{1}{2} \cos 10^0$

$= \cos 10^0 = \cos(90^0 - 80^0) = \sin 80^0$

= ଦକ୍ଷିଣପକ୍ଷ (ପ୍ରମାଣିତ) ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 4 (b)

('କ' ବିଭାଗ)

1. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

i) $\sin(A - B) = \frac{\sin A}{......} - \frac{\cos A}{......}$ ।

ii) $\cos(\theta + \alpha) + \cos(\alpha - \theta) =$ .... ।

iii) $\cos(60^0 - A) +$ .... $= \cos A$ ।

iv) $\sin(30^0 + A) + \sin(30^0 - A) =$ ...... ।

v) $2 \sin A . \sin B =$ .... $- \cos(A + B)$ ।

vi) $\tan(45^0 + \theta) . \tan(45^0 - \theta) =$ .... ।

'ଖ' ବିଭାଗ

2. ପ୍ରମାଣ କର :

i) $\frac{\sin(A - B)}{\cos A . \cos B} = \tan A - \tan B$

ii) $\frac{\cos(A + B)}{\cos A . \cos B} = 1 - \tan A . \tan B$

iii) $\frac{\cos(A - B)}{\cos A . \sin B} = \cot B + \tan A$

iv) $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} - \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin\beta . \cos\beta}$

v) $\frac{\cos\alpha}{\sin\beta} - \frac{\sin\alpha}{\cos\beta} = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin\beta . \cos\beta}$

3. ପ୍ରମାଣ କର :

i) $\cos(A + 45^0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos A - \sin A)$

ii) $\sin(45^0 - \theta) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta - \cos\theta)$

iii) $\tan(45^0 + \theta) = \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}$

iv) $\cot(45^0 - \theta) = \frac{\cot\theta + 1}{\cot\theta - 1}$

4. ପ୍ରମାଣ କର :

i) $\cos(45^0 - A) . \cos(45^0 - B) - \sin(45^0 - A) . \sin(45^0 - B) = \sin(A + B)$

ii) $\sin(40^0 + A) . \cos(20^0 - A) + \cos(40^0 + A) . \sin(20^0 - A) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

iii) $\cos(65^0 + \theta) . \cos(35^0 + \theta) + \sin(65^0 + \theta) . \sin(35^0 + \theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

iv) $\cos n\theta . \cos\theta + \sin n\theta . \sin\theta = \cos(n - 1)\theta$

v) $\tan(60^0 - A) = \frac{\sqrt{3}\cos A - \sin A}{\cos A + \sqrt{3}\sin A}$

'ଗ' ବିଭାଗ

5. ପ୍ରମାଣ କର :

(i) $\tan 62^0 = \frac{\cos 17^0 + \sin 17^0}{\cos 17^0 - \sin 17^0}$

(ii) $\tan 70^0 = \frac{\cos 25^0 + \sin 25^0}{\cos 25^0 - \sin 25^0}$

(iii) $\tan 7A . \tan 4A . \tan 3A = \tan 7A - \tan 4A - \tan 3A$

(iv) $\tan(x + y) - \tan x - \tan y = \tan(x + y) . \tan x . \tan y$

(v) $(1 + \tan 15^0)(1 + \tan 30^0) = 2$

(vi) $(\cot 10^0 - 1)(\cot 35^0 - 1) = 2$

(vii) $\frac{1}{\cot A + \tan B} - \frac{1}{\tan A + \cot B} = \tan(A - B)$

(viii) $\sqrt{3} + \cot 50^0 + \tan 80^0 = \sqrt{3} \cot 50^0 . \tan 80^0$

6. $\cos 75^0$ ଓ $\sin 15^0$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

7. (i) $\cos\alpha = \frac{8}{17}$ ଓ $\sin\beta = \frac{5}{13}$ ହେଲେ $\sin(\alpha - \beta)$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ii) $\tan A = \frac{1}{2}$, $\cot B = 3$ ହେଲେ $A + B$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iii) $\tan\beta = \frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$ ହେଲେ, $\tan(\alpha + \beta)$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

8. $A + B + C = 90^0$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

(i) $\cot A + \cot B + \cot C = \cot A . \cot B . \cot C$

(ii) $\tan A . \tan B + \tan B . \tan C + \tan C . \tan A = 1$

9. (i) $A + B + C = 180^0$ ଏବଂ $\sin C = 1$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\tan A . \tan B = 1$

(ii) $A + B + C = 180^0$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\cot A.\cot B + \cot B.\cot C + \cot C.\cot A = 1$

(iii) $A + B + C = 180^0$ ଏବଂ $\cos A = \cos B . \cos C$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

(a) $\tan A = \tan B + \tan C$

(b) $\tan B. \tan C = 2$

10. ଦର୍ଶାଅ ଯେ, (i) $\sin(A+B) .\sin(A-B) = \sin^2A - \sin^2B$

(ii) $\cos(A + B) . \cos(A-B) = \cos^2A - \sin^2B$

11. ପ୍ରମାଣ କର : (i) $\sin 50^0 + \sin 40^0 = \sqrt{2} \sin 85^0$

(ii) $\cos 50^0 + \cos 40^0 = \sqrt{2} \cos 5^0$

(iii) $\sin 50^0 - \sin 70^0 + \sin 10^0 = 0$

12. ସମାଧାନ କର : (i) $\sin(A + B) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos(A-B) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(ii) $\cos(A + B) = -\frac{1}{2}$, $\sin(A-B) = \frac{1}{2}$

(iii) $\tan(A-B) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \cot(A + B)$,

(iv) $\tan(A + B) = -1$, $\text{cosec}(A-B) = \sqrt{2}$

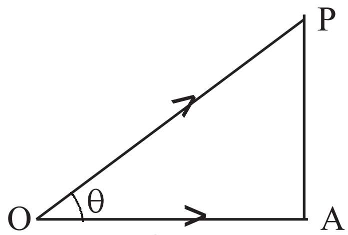
4.10 ଉଚ୍ଚତା ଓ ଦୂରତା (Heights and distances) :

ଗଣିତ ପାଠକୁ ସୁଖପ୍ରଦ କରିବା ପାଇଁ ଏହାର ପ୍ରୟୋଗାତ୍ମକ ଦିଗ ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା କରାଯିବା ଉଚିତ୍ । ପ୍ରତ୍ୟେକ୍ଷ ମାପ ନ କରି **ପଠାଣି ସାମନ୍ତ** ଏକ ନଳୀ ସାହାଯ୍ୟରେ ଶୀର୍ଷ ଦେଶକୁ ନିରୀକ୍ଷଣ କରି ପାହାଡ଼ର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରି ପାରୁଥିଲେ । ଏହା ପ୍ରୟୋଗାତ୍ମକ ଗଣିତର ଏକ ନମୁନା । ଆସ ଆମେ ତ୍ରିକୋଣମିତିର ବାସ୍ତବ କ୍ଷେତ୍ରରେ ପ୍ରୟୋଗ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

କେତେକ ସ୍ଥଳରେ ଯନ୍ତ୍ରୀମାନେ ପାହାଡ଼, ମନ୍ଦିର ପ୍ରଭୃତିର ଉଚ୍ଚତା ଏବଂ ନଦୀର ଦୁଇ ବିପରୀତ ଧାରରେ ଥିବା ବସ୍ତୁମାନଙ୍କର ଦୂରତା ମାପଫିତା ଦ୍ୱାରା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରନ୍ତି ନାହିଁ । ତ୍ରିକୋଣମିତିର ପ୍ରୟୋଗରେ ଏପରି ସମସ୍ୟାର ସମାଧାନ କରାଯାଇପାରେ । ଉଚ୍ଚତା ଓ ଦୂରତା ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ପ୍ରଶ୍ନର ସମାଧାନ ପୂର୍ବରୁ ନିମ୍ନସ୍ଥ କେତୋଟି ତତ୍ତ୍ୱ ସହିତ ଅବଗତ ହେବା ଦରକାର ।

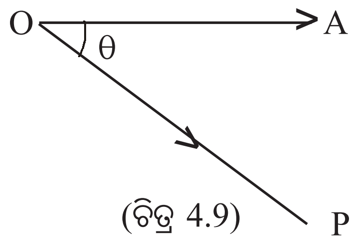
1. ପୃଥିବୀ ଏକ ଗୋଲାକାର ବସ୍ତୁ ହେଲେ ମଧ୍ୟ ଏହାର ବିଶାଳତା ହେତୁ ଏହାର ପୃଷ୍ଠର ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ର ଅଂଶକୁ ଆମେ ଗୋଟିଏ ସମତଳ ବୋଲି ଧରିପାରିବା । ଏହି **ସମତଳ ସହିତ ସମାନ୍ତରାଳ ଯେ କୌଣସି ସରଳରେଖାକୁ ଆନୁଭୂମିକ ସରଳରେଖା** କୁହାଯାଏ ।

ଯଥା : ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ $\overleftrightarrow{OA}$ ଏକ ଆନୁଭୂମିକ ରେଖା ।



(ଚିତ୍ର 4.8)

2. ଚିତ୍ରରେ O ବିନ୍ଦୁଠାରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏକ ଦର୍ଶକର ଚକ୍ଷୁ, ଅଧିକ ଉଚ୍ଚରେ ଥିବା ଏକ ବସ୍ତୁ P ଦିଗରେ ଦୃଷ୍ଟି ନିକ୍ଷେପ କରୁଥିବାର ଦେଖାଯାଉଛି । $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP}$ ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଭୂଲମ୍ବ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏକ ଆନୁଭୂମିକ ରଶ୍ମି । $\overrightarrow{OA}$ ଓ $\overrightarrow{OP}$ ରଶ୍ମିଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ P ବିନ୍ଦୁର **କୌଣିକ ଉନ୍ନତି (Angle of elevation)** ବୋଲି କୁହାଯାଏ । ଚିତ୍ରରେ ଏହାର ପରିମାଣ θ ଅଟେ ।

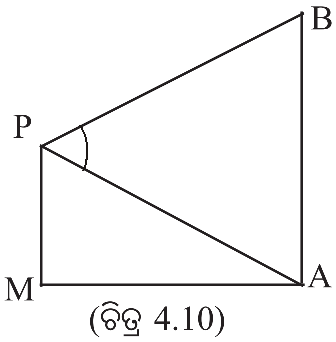


(ଚିତ୍ର 4.9)

ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ ଚକ୍ଷୁର ଅବସ୍ଥିତି ଲକ୍ଷ୍ୟ କର । ଏଠାରେ ଦୃଷ୍ଟି ନିକ୍ଷେପର ଦିଗ $\overrightarrow{OP}$ ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଲମ୍ବ ସମତଳରେ $\overrightarrow{OA}$ ଏକ ଆନୁଭୂମିକ ରଶ୍ମି । $\overrightarrow{OP}$ ଏବଂ $\overrightarrow{OA}$ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ P ବିନ୍ଦୁର **କୌଣିକ ଅବନତି (Angle of depression)** ବୋଲି କୁହାଯାଏ । ଚିତ୍ରରେ ଏହାର ପରିମାଣ θ ଅଟେ ।

ଦୃଷ୍ଟି ନିକ୍ଷେପର ଦିଗ ଓ ଏହାର ଲମ୍ବ ସମତଳରେ ଥିବା ଚକ୍ଷୁ ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଆନୁଭୂମିକ ରଶ୍ମି ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣକୁ ଦୃଷ୍ଟିବଦ୍ଧ ବସ୍ତୁର କୌଣିକ ଉନ୍ନତି ବା କୌଣିକ ଅବନତି କୁହାଯାଏ । **ସେକ୍ସ୍‌ଟାଣ୍ଟ (sextant)** ବା **ଥିଓଡୋଲାଇଟ୍ (Theodolite)** ଯନ୍ତ୍ର ସାହାଯ୍ୟରେ କୌଣିକ ଉନ୍ନତି ବା ଅବନତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇପାରେ । ଏହି କୋଣର ମାପ ବ୍ୟବହାର କରି ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ପ୍ରଣାଳୀଦ୍ୱାରା ଦୂରରେ ଅବସ୍ଥିତ ଦୁର୍ଗ, ପାହାଡ଼ ଓ ଅଟ୍ଟାଳିକା ପ୍ରଭୃତିର ଦୂରତା ବା ଉଚ୍ଚତା ନିରୂପଣ କରିହେବ ।

କୌଣସି ବସ୍ତୁ ଏକ ବିନ୍ଦୁଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କରୁଥିବା କୋଣ :



(ଚିତ୍ର 4.10)

ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ $\overline{PM}$ ଏକ ସ୍ତମ୍ଭ । $\overline{BA}$ ଏକ ମନ୍ଦିର । ମନ୍ଦିରର ପ୍ରାନ୍ତ ଓ ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁ ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{PM}$ ସ୍ତମ୍ଭର ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁ P କୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁ ସହ ଯୋଗ କରାଯାଇଛି । $\overline{AB}$ ମନ୍ଦିରଟି P ବିନ୍ଦୁଠାରେ $\angle APB$ ଉତ୍ପନ୍ନ କରୁଥିବାର କୁହାଯାଏ ।

ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରୟୋଗ କରି ଉଚ୍ଚତା ଓ ଦୂରତା ସମ୍ପର୍କିତ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କ ସମାଧାନ ସହଜରେ କରାଯାଇପାରେ । ଉଦାହରଣଗୁଡ଼ିକୁ ଦେଖ ।

ଉଦାହରଣ – 17 :

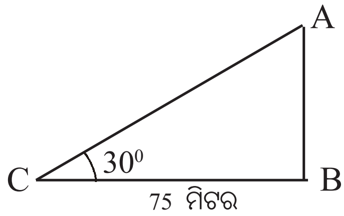
ଏକ ଅଟ୍ଟାଳିକାର ପାଦଦେଶଠାରୁ 75 ମିଟର ଦୂରରେ ଏକ ସମତଳରେ ଥିବା ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରୁ ଅଟ୍ଟାଳିକାର ଶୀର୍ଷର କୌଣିକ ଉନ୍ନତିର ପରିମାଣ 30^0 । ଅଟ୍ଟାଳିକାର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ($\sqrt{3} = 1.732$)

ସମାଧାନ : $\overline{BC}$ ସମତଳ ଉପରିସ୍ଥ ରେଖାଖଣ୍ଡ, BA ଅଟ୍ଟାଳିକାର ଉଚ୍ଚତା ଓ A ଅଟ୍ଟାଳିକାର ଶୀର୍ଷ ହେଉ ।

ଏଠାରେ BC = 75 ମିଟର ଓ $m\angle BCA=30^0$ ।

ABC ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ

$\tan 30^0 = \frac{BA}{BC} = \frac{BA}{75}$ କିମ୍ବା BA = 75 tan 30



(ଚିତ୍ର 4.11)

$= 75 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 75 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 25\sqrt{3} = 25 \times 1.732 = 43.3$ ମିଟର

∴ ଅଟ୍ଟାଳିକାର ଉଚ୍ଚତା 43.3 ମିଟର (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ – 18 :

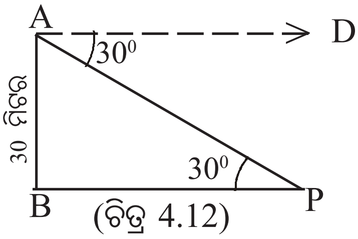
30 ମିଟର ଉଚ୍ଚ ଗୋଟିଏ ବୃକ୍ଷର ଅଗ୍ରଭାଗରୁ ଏକ ସମତଳରେ ଓ ବୃକ୍ଷର ପାଦଦେଶରୁ କିଛି ଦୂରରେ ଥିବା ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁର କୌଣିକ ଅବନତିର ପରିମାଣ 30^0 । ବୃକ୍ଷ ପାଦଦେଶରୁ ବିନ୍ଦୁର ଉକ୍ତ ଦୂରତା ସ୍ଥିର କର । (ଦତ୍ତ ଅଛି, $\sqrt{3}=1.732$)

ସମାଧାନ : BA = ବୃକ୍ଷର ଉଚ୍ଚତା = 30 ମିଟର, $m\angle DAP= 30^0$ ବୃକ୍ଷର ପାଦ ଦେଶ B ରୁ ଏକ ସମତଳରେ ଥିବା ବିନ୍ଦୁଟି P, BP ଦୈର୍ଘ୍ୟଟି ଆବଶ୍ୟକ । ଏଠାରେ ABP ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ $m\angle APB= 30^0$

$\therefore \tan 30^0 = \frac{AB}{BP} = \frac{30}{BP} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{30}{BP}$

$\therefore$ BP $= 30\sqrt{3}$ ମିଟର = (30×1.732) ମିଟର

= 51.96 ମିଟର (ଉତ୍ତର)



(ଚିତ୍ର 4.12)

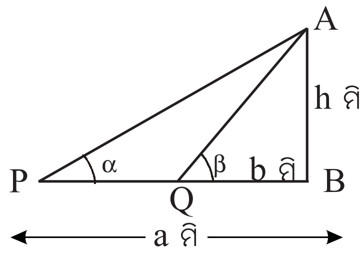
ଉଦାହରଣ – 19 : ଏକ ସ୍ତମ୍ଭ $\overline{AB}$ର ପାଦଦେଶ B ରୁ ଆନୁଭୂମିକ ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ P ଓ Q ର B ଠାରୁ ଦୂରତା ଯଥାକ୍ରମେ a ମି ଓ b ମି । P ଓ Q, ସ୍ତମ୍ଭର ଶୀର୍ଷ A ର କୌଣିକ ଉନ୍ନତିର ପରିମାଣ ଯଥାକ୍ରମେ α^0 ଓ β^0 । ଯଦି $\alpha+\beta = 90^0$ ତେବେ ସ୍ତମ୍ଭର ଉଚ୍ଚତା AB ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର AB = h ମିଟର । ଦତ୍ତ ଅଛି BP = a ମି ଓ BQ = b ମି.,

$\angle APB = \alpha, \angle AQB = \beta$ ଏବଂ $\alpha + \beta = 90^0$

AQB ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ $\tan\beta = \frac{AB}{BQ} = \frac{h}{b}$

APB ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ $\tan\alpha = \frac{AB}{BP} = \frac{h}{a}$



(ଚିତ୍ର 4.13)

ଆମେ ଜାଣୁ, $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}$

$$= \frac{\frac{h}{a}+\frac{h}{b}}{1-\frac{h^2}{ab}} = \frac{h(a+b)}{ab-h^2} \Rightarrow \cot(\alpha+\beta) = \frac{ab-h^2}{h(a+b)}$$

ମାତ୍ର $\cot(\alpha+\beta) = \cot 90^0 = 0$

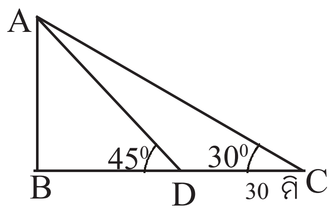
$\therefore\ ab - h^2 = 0 \Rightarrow h = \sqrt{ab}$ ମି. । AB = h ମି.= $\sqrt{ab}$ ମି. (ଉ)

ଉଦାହରଣ – 20 :

ସୂର୍ଯ୍ୟର କୌଣିକ ଉନ୍ନତିର ପରିମାଣ 30^0 ଥିବା ବେଳେ ଗୋଟିଏ ସ୍ତମ୍ଭର ଛାଇର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯେତେ, ସୂର୍ଯ୍ୟର କୌଣିକ ଉନ୍ନତିର ପରିମାଣ 45^0 ବେଳେ ଛାଇର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ତା'ଠାରୁ 30 ମିଟର କମ୍ । ସ୍ତମ୍ଭଟିର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ($\sqrt{3}$=1.732)

ସମାଧାନ : ଚିତ୍ର 4.14 ରେ AB ସ୍ତମ୍ଭର ଉଚ୍ଚତା, BD ଓ BC ଯଥାକ୍ରମେ ସ୍ତମ୍ଭର ଛାଇ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯେତେବେଳେ ସୂର୍ଯ୍ୟର କୌଣିକ ଉନ୍ନତିର ପରିମାଣ 45^0 ଓ 30^0 ଏବଂ CD = BC – BD = 30 ମିଟର ।

ମନେକର ସ୍ତମ୍ଭର ଉଚ୍ଚତା = AB = x ମିଟର



(ଚିତ୍ର 4.14)

BAD ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ $\tan 45^0 = \frac{x}{BD}$

$\Rightarrow BD = \frac{x}{\tan 45^0} = \frac{x}{1} = x$

ଓ BAC ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ $\tan 30^0 = \frac{x}{BC} \Rightarrow BC = \frac{x}{\tan 30^0} = \frac{x}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = x\ .\ \sqrt{3}$

ପ୍ରଶ୍ନାନୁଯାୟୀ BC – BD = DC = 30 ମି. $\Rightarrow x\sqrt{3} - x = 30$

$$\Rightarrow x = \frac{30}{\sqrt{3}-1} = \frac{30(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{30(\sqrt{3}+1)}{3-1}$$

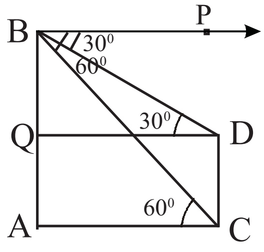
$$= \frac{30(1.732+1)}{(3-1)} = \frac{30 \times 2.732}{2} = 15 \times 2.732 = 40.98 \text{ ମିଟର}$$

$\therefore$ ସ୍ତମ୍ଭଟିର ଉଚ୍ଚତା = 40.98 ମିଟର (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ – 21 : ଗୋଟିଏ ପାହାଡ଼ ଉପରୁ 100 ମିଟର ଉଚ୍ଚ ଏକ ସମତଳରେ ଥିବା ଗୋଟିଏ ସ୍ତମ୍ଭର ଶୀର୍ଷ ଓ ପାଦଦେଶର କୌଣିକ ଅବନତିର ପରିମାଣ ଯଥାକ୍ରମେ 30^0 ଓ 60^0 । ପାହାଡ଼ର ଉଚ୍ଚତା ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର AB = ପାହାଡ଼ର ଉଚ୍ଚତା ଓ $\overline{CD}$ ଏକ ସମତଳସ୍ଥ ସ୍ତମ୍ଭ ।

$\overleftrightarrow{BP}$ ଭୂପୃଷ୍ଠ ସହ ସମାନ୍ତର ରେଖା ହେଲେ $m\angle PBD = 30^0$ ଓ $m\angle PBC = 60^0$ ଓ CD = 100 ମି.



(ଚିତ୍ର 4.15)

ମନେକର ପାହାଡ଼ର ଉଚ୍ଚତା AB = x ମିଟର ଓ $\overline{DQ} \parallel \overline{BP} \parallel \overline{AC}$

$\therefore\ m\angle BCA = 60^0$ ଓ $m\angle BDQ = 30^0$

BQ = AB – AQ = AB – DC = (x – 100) ମି.

BQD ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ $\tan 30^0 = \dfrac{BQ}{QD}$

$$\Rightarrow QD = \frac{BQ}{\tan 30^0} \Rightarrow QD = \frac{x-100}{\tan 30^0} \qquad ....(i)$$

BAC ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ $\tan 60^0 = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow AC = \dfrac{AB}{\tan 60^0} \Rightarrow AC = \dfrac{x}{\tan 60^0}$ ....(ii)

ମାତ୍ର QD = AC $\therefore$ (i) ଓ (ii) ରୁ $\dfrac{x-100}{\tan 30^0} = \dfrac{x}{\tan 60^0}$

$$\Rightarrow \frac{x-100}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{3}\,(x-100) = \frac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow 3\,(x-100) = x \Rightarrow 3x - 300 = x$$

$$\Rightarrow 3x - x = 300 \Rightarrow 2x = 300 \Rightarrow x = 150$$

$\therefore$ ପାହାଡ଼ର ଉଚ୍ଚତା 150 ମିଟର ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 4 (c)

(କ – ବିଭାଗ)

($\sqrt{3} = 1.732$)

1. ଗୋଟିଏ ବୃକ୍ଷର ପାଦଦେଶ ସହ ଏକ ସମତଳରେ ଏବଂ ଏହାଠାରୁ 120 ମି. ଦୂରରେ ଅବସ୍ଥିତ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁରେ ବୃକ୍ଷର ଅଗ୍ରଭାଗର କୌଣିକ ଉନ୍ନତିର ପରିମାଣ 30^0 ହେଲେ ବୃକ୍ଷର ଉଚ୍ଚତା ସ୍ଥିର କର ।

2. 27 ମିଟର ଉଚ୍ଚ ଏକ ବତୀଘରର ଶୀର୍ଷରୁ ଏକ ଜାହାଜର କୌଣିକ ଅବନତିର ପରିମାଣ 30^0 । ବତୀଘରଠାରୁ ଜାହାଜର ଦୂରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3. 2 ମିଟର ଉଚ୍ଚ ଏକ ଦର୍ଶକ ଦେଖିଲା ଯେ, 24 ମିଟର ଦୂରରେ ଥିବା ଏକ ସ୍ତମ୍ଭର କୌଣିକ ଉନ୍ନତିର ପରିମାଣ 30^0 । ସ୍ତମ୍ଭର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. ଏକ ସିଡ଼ି ଏକ କାନ୍ଥର ଶୀର୍ଷକୁ ସ୍ପର୍ଶ କରୁଛି । ସିଡ଼ିର ପାଦ ଦେଶରୁ କାନ୍ଥର ଦୂରତା 3 ମିଟର । ସିଡ଼ିଟି ଭୂମି ସହ 60^0 ରେ ଆନତ । ସିଡ଼ିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସ୍ଥିର କର ।

5. 1.5 ମିଟର ଉଚ୍ଚ ଜଣେ ଦର୍ଶକ ଏକ କୋଠାଘରଠାରୁ 12 ମିଟର ଦୂରସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଦେଖିଲା ଯେ, କୋଠାଘରର ଶୀର୍ଷର କୌଣିକ ଉନ୍ନତିର ପରିମାଣ 60^0 । କୋଠାଘରର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

6. ସୂର୍ଯ୍ୟର କୌଣିକ ଉନ୍ନତିର ପରିମାଣ 60^0 ବେଳେ ଗୋଟିଏ ଗଛର ଛାଇର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 15 ମିଟର ଥିଲା । ଗଛର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ଖ – ବିଭାଗ)

7. 300 ମିଟର ଉଚ୍ଚ ଏକ ପାହାଡ଼ ଉପରୁ ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ଗୋଟିଏ ସ୍ତମ୍ଭର ଶୀର୍ଷ ଓ ପାଦଦେଶର କୌଣିକ ଅବନତିର ପରିମାଣ ଯଥାକ୍ରମେ 30^0 ଓ 60^0 ହେଲେ ସ୍ତମ୍ଭର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

8. ସୂର୍ଯ୍ୟର କୌଣିକ ଉନ୍ନତିର ପରିମାଣ 60^0 ରୁ 45^0 କୁ ହ୍ରାସ ପାଇଥିବାରୁ ଏକ ସ୍ତମ୍ଭର ଛାଇର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 24 ମିଟର ବୃଦ୍ଧି ପାଇଲା । ସ୍ତମ୍ଭର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

9. ଏକ ସମତଳ ଭୂମି ଉପରେ 40 ମିଟର ବ୍ୟବଧାନରେ ଦୁଇଟି ଖୁଣ୍ଟ ଲମ୍ବ ଭାବରେ ପୋତା ଯାଇଛି । ଗୋଟିଏ ଖୁଣ୍ଟର ଉଚ୍ଚତା ଅନ୍ୟ ଖୁଣ୍ଟର ଉଚ୍ଚତାର ଦୁଇଗୁଣ । ଖୁଣ୍ଟଦ୍ୱୟ ସେମାନଙ୍କ ପାଦବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡର ମଧ୍ୟ ବିନ୍ଦୁରେ ଯେଉଁ କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରନ୍ତି, ସେମାନେ ପରସ୍ପର ଅନୁପୂରକ । ଖୁଣ୍ଟ ଦ୍ୱୟର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

10. ଗୋଟିଏ ଗଛର ଶୀର୍ଷରୁ ଭୂମି ଉପରେ ଥିବା ଗୋଟିଏ ବସ୍ତୁର କୌଣିକ ଅବନତିର ପରିମାଣ 60^0 ଥିଲା । ସେହି ଗଛର ଶୀର୍ଷରୁ 1.5 ମିଟର ତଳକୁ ଓହ୍ଲାଇ ଆସିଲେ ଉକ୍ତ ବସ୍ତୁରେ କୌଣିକ ଅବନତିର ପରିମାଣ 30^0 ହୁଏ । ଗଛର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

11. 10 ମିଟର ଉଚ୍ଚ ଏକ ସ୍ତମ୍ଭର ଅଗ୍ରଭାଗରୁ ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ଗୋଟିଏ ମନ୍ଦିରର ଶୀର୍ଷର କୌଣିକ ଉନ୍ନତିର ପରିମାଣ ଓ ପାଦଦେଶର କୌଣିକ ଅବନତିର ପରିମାଣ ଯଥାକ୍ରମେ 45^0 ଓ 30^0 ହୋଇଯାଏ । ମନ୍ଦିରର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

12. 12 ମିଟର ପ୍ରସ୍ତ ଏକ ରାସ୍ତାର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିବା ଏକ କୋଠାଘର, ଏହାର ଅପର ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିବା ଅନ୍ୟ ଏକ ଘରର ଝରକାରେ ଏକ ସମକୋଣ ସୃଷ୍ଟି କରେ । କୋଠାଘରର ପାଦଦେଶରେ ଝରକାର କୌଣିକ ଉନ୍ନତିର ପରିମାଣ 30^0 ହେଲେ କୋଠାଘରର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

13. ଜଣେ ଲୋକ ଗୋଟିଏ ନଦୀ କୂଳରେ ଠିଆ ହୋଇ ଦେଖିଲା ଯେ ନଦୀର ଅପର ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଭୂମିରେ ଥିବା ଗୋଟିଏ ଦୁର୍ଗର କୌଣିକ ଉନ୍ନତିର ପରିମାଣ 60^0 । ଦୁର୍ଗ ସହିତ ଏକ ସରଳରେଖାରେ 60 ମିଟର ପଛକୁ ଘୁଞ୍ଚି ଆସି ଦେଖିଲା ଯେ, ଉକ୍ତ କୌଣିକ ଉନ୍ନତିର ପରିମାଣ 45^0 ହେଲା । ନଦୀର ପ୍ରସ୍ଥ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

14. ଦୁଇଟି ସ୍ତମ୍ଭ ପରସ୍ପରଠାରୁ 12 ମିଟର ଦୂରରେ ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ । ଗୋଟିକର ଉଚ୍ଚତା ଅନ୍ୟଟିର ଦୁଇଗୁଣ । ସ୍ତମ୍ଭଦ୍ୱୟର ପାଦବିନ୍ଦୁକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁରୁ ଦେଖିଲେ ସ୍ତମ୍ଭଦ୍ୱୟର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର କୌଣିକ ଉନ୍ନତି ପରସ୍ପର ଅନୁପୂରକ ହୁଏ, ସ୍ତମ୍ଭଦ୍ୱୟର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

15. ଗୋଟିଏ ଦୁର୍ଗର ପାଦ ଦେଶ ସହ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଥିବା ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁରୁ ଦୁର୍ଗର ଶୀର୍ଷ ଭାଗର କୌଣିକ ଉନ୍ନତିର ପରିମାଣ ଯଥାକ୍ରମେ 30^0 ଓ 45^0 । ଦୁର୍ଗର ଉଚ୍ଚତା 30 ମିଟର ହେଲେ, ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ବ୍ୟବଧାନ କେତେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

16. ଗୋଟିଏ କୋଠାର ଉଚ୍ଚତା 12 ମିଟର । କୋଠାର ଶୀର୍ଷରୁ ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏକ ସ୍ତମ୍ଭର ଶୀର୍ଷ ଓ ପାଦଦେଶର କୌଣିକ ଉନ୍ନତି ଓ ଅବନତିର ପରିମାଣ ଯଥାକ୍ରମେ 60^0 ଓ 30^0 । ସ୍ତମ୍ଭର ଉଚ୍ଚତା ଓ କୋଠାଠାରୁ ସ୍ତମ୍ଭର ଦୂରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

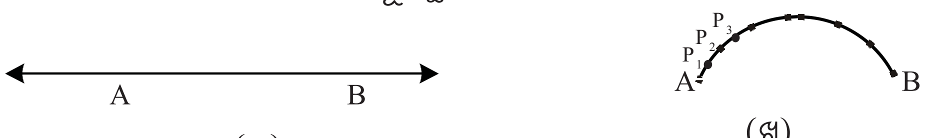
ପରିମିତି
(MENSURATION)

5.1. ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ପୂର୍ବରୁ ତୁମେ ରେଖାଖଣ୍ଡ, ତ୍ରିଭୁଜ, ବର୍ଗଚିତ୍ର, ଆୟତଚିତ୍ର, ରମ୍ବସ୍, ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍ ଇତ୍ୟାଦି ସରଳରୈଖିକ ଚିତ୍ରର ପରିସୀମା ଏବଂ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିଅଛ। ଏତଦ୍‌ବ୍ୟତୀତ ଆୟତଘନ, ସମଘନ ପରି ବହୁଫଳକଗୁଡ଼ିକର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଏବଂ ଆୟତନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ମଧ୍ୟ ଅବଗତ ଅଛ । ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ବକ୍ରରୈଖିକ ଚିତ୍ର ଯଥା:- ବୃତ୍ତ, ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମାପ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଜାଣିବା ସହିତ ପ୍ରିଜିମ୍, ସିଲିଣ୍ଡର, କୋନ୍, ଗୋଲକ ପ୍ରଭୃତି ଘନ ପଦାର୍ଥମାନଙ୍କର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଏବଂ ଆୟତନ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଅବଗତ ହେବ। ଏଥି ନିମନ୍ତେ ଆବଶ୍ୟକୀୟ ସୂତ୍ର ଗୁଡ଼ିକ ଯାହା ଉଚ୍ଚତର ଗଣିତ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରତିପାଦିତ ହୋଇଛି ଉକ୍ତ ଅଧ୍ୟାୟରେ ସେଗୁଡ଼ିକୁ ଆମେ ମୁଖ୍ୟତଃ ପ୍ରୟୋଗାତ୍ମକ ଦୃଷ୍ଟିକୋଣରୁ ଗ୍ରହଣ କରିବା; କାରଣ ଉକ୍ତ ସୂତ୍ରଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରତିପାଦନ କରିବା ଏହି ଶ୍ରେଣୀରେ ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ ।

5.2. ବୃତ୍ତର ପରିଧି ଓ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ (Circumference of a circle and length of an arc) :

ତୁମେ ଏକ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମାପିବା ପୂର୍ବରୁ ଶିଖିଛ ।



(କ) (ଖ)

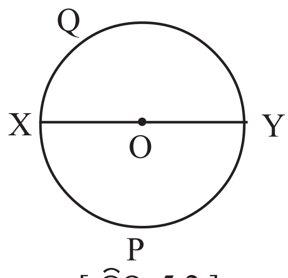
[ଚିତ୍ର 5.1]

ଚିତ୍ର 5.1 (କ) ରେ A ଓ B, $\overleftrightarrow{AB}$ ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ । ତୁମେ A ଓ B ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା ଅର୍ଥାତ୍ $\overline{AB}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିରୂପଣ କରିବା ଜାଣିଛ । ଚିତ୍ର 5.1 (ଖ) ରେ A ଓ B ଏକ ବକ୍ରରେଖା ଉପରେ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ । ବକ୍ରରେଖାଟି ଉପରେ ଅନେକ ଗୁଡ଼ିଏ ବିନ୍ଦୁ $P_1, P_2, P_3,$ .... ନିଆଯାଇଛି, ଯେପରିକି A ଓ P_1, P_1 ଓ P_2, P_2 ଓ P_3 ...... ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ବକ୍ରରେଖାର ଅଂଶ ଗୁଡ଼ିକ ଏକ ସରଳ ରେଖାର ଅଂଶ ପରି ପ୍ରତୀୟମାନ ହେବ ।

ବକ୍ରରେଖା ଉପରେ A ଓ B ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା, ଏହି କ୍ଷୁଦ୍ର ସରଳରେଖୀୟ ଅଂଶ ଗୁଡ଼ିକର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟିର ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ହେବ । $P_1, P_2, P_3,$ .... ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକର ସଂଖ୍ୟା ଯେତେ ଅଧିକ ହେବ ବକ୍ରଦୂରତାର ମାପରେ ତ୍ରୁଟି ସେତେ କମ୍ ହେବ । ଉଚ୍ଚତର ଶ୍ରେଣୀରେ ବିକଳ୍ପ ଗାଣିତିକ ପ୍ରଣାଳୀ ପ୍ରୟୋଗ କରି ବକ୍ରଦୂରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ଶିଖିବ । ପୂର୍ବରୁ ବୃତ୍ତ

ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଶେଷ ଆଲୋଚନା ଦ୍ୱିତୀୟ ଅଧ୍ୟାୟରେ ହୋଇସାରିଛି। ନିମ୍ନରେ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଉପରେ ଥିବା ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ବକ୍ର ଦୂରତା ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

ବୃତ୍ତ ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ଗୋଟିଏ ଜ୍ୟାମିତିକ ଚିତ୍ର ଯାହାକି ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସେଟ୍ ଅଟେ। କମ୍ପାସ୍ ସାହାଯ୍ୟରେ ଏହି ଚିତ୍ରଟି କିପରି ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରେ ତାହା ତୁମେ ପୂର୍ବରୁ ଜାଣିଛ। ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରଟି ଏକ ବୃତ୍ତର ଚିତ୍ର। 'O' ବିନ୍ଦୁ ବୃତ୍ତର **କେନ୍ଦ୍ର (centre)** ଅଟେ। $\overline{OX}$ ରେଖାଖଣ୍ଡ ବୃତ୍ତର **ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ (Radius)**। କେନ୍ଦ୍ର ମଧ୍ୟଦେଇ ବୃତ୍ତର ଯେ କୌଣସି ଦୁଇ ବିନ୍ଦୁକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ **ବ୍ୟାସ (diameter)** କୁହାଯାଏ।



[ଚିତ୍ର 5.2]

ଚିତ୍ର 5.2ରେ $\overline{XY}$ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସ ଅଟେ। ଲକ୍ଷ୍ୟକର ବ୍ୟାସ = XO + OY = 2 × OX = 2 ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ, ବୃତ୍ତର ଦୈର୍ଘ୍ୟକୁ **ପରିଧି (circumference)** କୁହାଯାଏ।

ବୃତ୍ତର ଅର୍ଦ୍ଧକୁ **ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ (semicircle)** କୁହାଯାଏ। ଚିତ୍ରର $\widehat{XPY}$ ଏବଂ $\widehat{XQY}$ ଦୁଇଟି ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ। ଏମାନଙ୍କର ମାପକୁ **(semi-circumference)** ଅର୍ଦ୍ଧପରିଧି କୁହାଯାଏ।

ବୃତ୍ତକୁ ଏକ ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ଚାପ ରୂପେ ବିଚାର କରାଯାଇପାରେ। ଅନ୍ୟ ପ୍ରକାରରେ କହିବାକୁ ଗଲେ ଉକ୍ତ ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟକୁ ବୃତ୍ତର ପରିଧି କୁହାଯାଏ। ସେହିପରି ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତର ଦୈର୍ଘ୍ୟକୁ ଅର୍ଦ୍ଧପରିଧି କୁହାଯାଏ।

5.2.1 ବୃତ୍ତର ପରିଧି ପାଇଁ ସୂତ୍ର (Formula for the circumference of a circle) :

କମ୍ପାସ୍ ସାହାଯ୍ୟରେ ବିଭିନ୍ନ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରି ଚିତ୍ର ଉପରେ ସୂତା ରଖି ସୂତାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମାପି ବୃତ୍ତର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବା ପରିଧି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର। ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତମାନଙ୍କର ବ୍ୟାସର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମାପି ସଂପୃକ୍ତ ପରିଧିକୁ ବ୍ୟାସ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରି ଭାଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର। ଅର୍ଥାତ୍ ପରିଧି ଓ ବ୍ୟାସର ଆନୁପାତ ସ୍ଥିର କର ।

ଏହାକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟକଲେ ଜଣାଯିବ ଏହା 3 ଅପେକ୍ଷା ଅଳ୍ପ ଅଧିକ। ପ୍ରାୟ ଏହାର ମାନ 3.1 ଠାରୁ 3.2 ମଧ୍ୟରେ ରହିବ। ଏଥିରୁ ଜଣାଗଲା ଯେ ବୃତ୍ତର ଆକାର ଯାହାହେଲେ ମଧ୍ୟ **ପରିଧି ଓ ବ୍ୟାସର ଅନୁପାତ ସର୍ବଦା ଏକ ସ୍ଥିରାଙ୍କ।** ଏହି ସ୍ଥିର ମାନଟି ଗ୍ରୀକ୍ ଅକ୍ଷର **π** (ପାଇ) ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୁଏ। 1761 ଖ୍ରୀ.ଅରେ ଏହା ଏକ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ବୋଲି **ସୁଇସ୍ ଗଣିତଜ୍ଞ ଜୋହାନ୍ ଲାମ୍ବର୍ଟ (Johann Lambert (1728-1777)** ପ୍ରମାଣ କରିଥିଲେ।

$$\therefore \frac{\text{ବୃତ୍ତର ପରିଧି}}{\text{ବ୍ୟାସର ଦୈର୍ଘ୍ୟ}} = \pi$$

ପରିଧି, ବ୍ୟାସ ଓ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧକୁ ଯଥାକ୍ରମେ c, d ଏବଂ r ରୂପେ ସୂଚିତ କରାଗଲେ $\frac{c}{d} = \pi$ ହେବ।

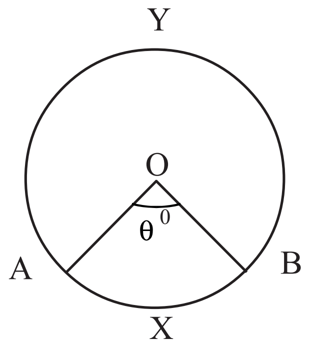
$\therefore c = \pi d = 2\pi r$ ଅର୍ଥାତ୍ $\boxed{\text{ବୃତ୍ତର ପରିଧି} = 2\pi \times \text{ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ}}$

π ର ଯୁକ୍ତିସଂଗତ ଆସନ୍ନମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ ପ୍ରାୟ ଦୀର୍ଘ 2500 ବର୍ଷ ବ୍ୟାପି ଚେଷ୍ଟା ହୋଇ ଆସୁଅଛି। କେତେକ ଭାରତୀୟ ଗଣିତଜ୍ଞଙ୍କଦ୍ୱାରା ନିର୍ଣ୍ଣିତ **π** ର ଆସନ୍ନମାନ ନବମ ଶ୍ରେଣୀ ପାଇଁ ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଗଣିତ ପୁସ୍ତକରେ ଦିଆଯାଇଛି। ସେଗୁଡ଼ିକୁ ମନେପକାଅ। **π ଏକ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା।**

ବିଭିନ୍ନ ଗାଣିତିକ ପ୍ରଶ୍ନର ସମାଧାନ ବେଳେ **π** ର ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଆସନ୍ନମାନ ଦିଆଯାଇ ନଥିଲେ ଏହା $\frac{22}{7}$ ବୋଲି ସାଧାରଣତଃ ଗ୍ରହଣ କରାଯାଇଥାଏ। **π** ର ଅନ୍ୟାନ୍ୟ କେତେକ ମାନ ହେଲା 3.141, $\sqrt{10}$ ଇତ୍ୟାଦି।

5.2.2 ବୃତ୍ତର ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ (Determining the length of an arc) :

ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ $\widehat{AXB}$ ର ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ A ଓ Bକୁ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ସହିତ ଯୋଗ କଲେ ଉତ୍ପନ୍ନ ∠AOB କୁ ସଂପୃକ୍ତ ଚାପର କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ କୁହାଯାଏ। ମନେକର ଏହାର ମାପ θ°। ବୃତ୍ତର ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସାନବଡ଼ ଅନୁସାରେ କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ ଅଥବା ସଂପୃକ୍ତ ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ ସମାନୁପାତିକ ଭାବରେ ହ୍ରାସ ବୃଦ୍ଧି ଘଟିଥାଏ। **(ଚାପ ସଂପୃକ୍ତ କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣକୁ ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ (degree measure of an arc) କୁହାଯାଏ।)** କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାପକୁ ଡିଗ୍ରୀ, ଗ୍ରେଡ୍ ବା ରେଡ଼ିଆନ୍ ପରିମାପରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇଥାଏ। ଚିତ୍ରରେ $m\widehat{AXB} = \theta^0$ । ପ୍ରକାଶ ଥାଉକି ସଂପୂର୍ଣ୍ଣ ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପକୁ 360^0 ବା 360 ନିଆଯିବ।



[ଚିତ୍ର 5.3]

∵ କୌଣସି ବୃତ୍ତରେ ଦୁଇଟି ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନୁପାତ, ସେମାନଙ୍କର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପର ଅନୁପାତ ସହିତ ସମାନ।

$$\therefore \frac{\text{ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ}}{\text{ପରିଧି}} = \frac{\text{ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ}}{\text{ବୃତ୍ତର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ}} \Rightarrow \frac{L}{2\pi r} = \frac{\theta}{360^0}$$

(ଯେଉଁ ଠାରେ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ L ଏକକ, ପରିଧି = $2\pi r$ ଏକକ ଏବଂ ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ = θ^0 ଏବଂ ବୃତ୍ତ ବା ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ 360^0)

$$\therefore \boxed{L = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r} \text{ ଅଥବା } \boxed{L = \frac{\theta}{180} \times \pi r}$$

ଚିତ୍ର 5.3 ରେ $\widehat{AXB}$ କ୍ଷୁଦ୍ର ଚାପର ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ A ଓ B କୁ କେନ୍ଦ୍ର O ସହିତ ଯୋଗ କରାଯାଇଛି । $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ ଏବଂ $\widehat{AXB}$ ର ସଂଯୋଗରେ **ବୃତ୍ତକଳା (Sector)** ଗଠିତ ହୋଇଛି । ଏହାକୁ **OAXB ବୃତ୍ତକଳା** କୁହାଯାଏ । ସେହିପରି OAYB ଅନ୍ୟ ଏକ ବୃତ୍ତକଳା । କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ ସହ ସଂପୃକ୍ତ ଥିବାରୁ OAXB କୁ **କ୍ଷୁଦ୍ର ବୃତ୍ତକଳା (Minor Sector)** ଓ ଅନ୍ୟପକ୍ଷରେ OAYB କୁ **ବୃହତ୍ ବୃତ୍ତକଳା (Major Sector)** କୁହାଯାଏ ।

OAXB ବୃତ୍ତକଳାର ପରିସୀମା = OA + OB+ $\widehat{AXB}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 2 × OA + $\widehat{AXB}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ

∴ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r ଏକକ ଏବଂ $\widehat{AXB}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ L ଏକକ ହୁଏ,

ତେବେ ବୃତ୍ତକଳାର ପରିସୀମା = (2r + L) ଏକକ

ଚିତ୍ର 5.3 ରେ OAXB ଓ OAYB ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତକଳା । ସେମାନଙ୍କର ଚାପଦ୍ୱୟ ଯଥାକ୍ରମେ $\overset{\frown}{AXB}$ ଓ $\overset{\frown}{AYB}$ ଏବଂ ସେମାନଙ୍କର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ ଯଥାକ୍ରମେ θ^0 ଏବଂ $(360^0 - \theta)$ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ସଂଜ୍ଞାନୁସାରେ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r ଏକକ ହେଲେ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର r ଏକକ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ଚାପର କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣର ରେଡ଼ିଆନ୍ ପରିମାଣ 1^c । ସୁତରାଂ ଏକ ଚାପର ରେଡିଆନ୍ ପରିମାପ θ^c ହେଲେ

$\theta^c = \frac{L}{R}$ । ସୁତରାଂ $L = r\theta$ (θ ରେଡ଼ିଆନ୍)

ସମାହିତ ପ୍ରଶ୍ନାବଳୀ

ଉଦାହରଣ - 1 : ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 21 ସେ.ମି. ହେଲେ ଏହାର ପରିଧି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । $(\pi \simeq \frac{22}{7})$

ସମାଧାନ - ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $(r) = 21$ ସେ.ମି.

$\therefore$ ବୃତ୍ତର ପରିଧି $= 2\pi r = 2 \times \frac{22}{7} \times 21 = 132$ ସେ.ମି. (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 2 : ଗୋଟିଏ ଶଗଡ଼ ଚକର ଅରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 91 ସେ.ମି. । ରାସ୍ତା ଅତିକ୍ରମ କରିବା ପାଇଁ ଚକଟି 45 ଥର ଘୁରିଲେ ଏହା କେତେ ରାସ୍ତା ଅତିକ୍ରମ କରିବ ? $(\pi \simeq \frac{22}{7})$

ସମାଧାନ - ଚକ ଅରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $(r) = 91$ ସେ.ମି.

ଚକର ପରିଧି $= 2\pi r = 2 \times \frac{22}{7} \times 91 = 572$ ସେ.ମି.

ଅର୍ଥାତ୍ ଚକଟି ଥରେ ଘୁରିଲେ 572 ସେ.ମି. ରାସ୍ତା ଅତିକ୍ରମ କରିବ ।

ଚକଟି 45 ଥର ଘୁରିଲେ ଅତିକ୍ରମ କରୁଥିବା ରାସ୍ତାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $= 572 \times 45 = 25740$ ସେ.ମି.

$= 257$ ମି. 49 ସେ.ମି. (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 3 : 28 ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତାକାର ଜମିକୁ ବାଡ଼ ଦ୍ୱାରା ଆବଦ୍ଧ କରିବା ପାଇଁ ମିଟର ପ୍ରତି 5.50 ଟଙ୍କା ହିସାବରେ କେତେ ଖର୍ଚ୍ଚ ହେବ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । $(\pi \simeq \frac{22}{7})$

ସମାଧାନ - ମନେକର ଅର୍ଦ୍ଧ ବୃତ୍ତାକାର ଜମିର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $(r) = 28$ ମି.

$\therefore$ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତାକାର ଜମିର ପରିସୀମା $= (\pi r + 2r) = \frac{22}{7} \times 28 + 2 \times 28 = 88 + 56 = 144$ ମି.

ମିଟର ପ୍ରତି ବାଡ଼ ଦେବା ଖର୍ଚ୍ଚ = 5.50 ଟଙ୍କା

$\therefore$ 144 ମି. ବାଡ଼ ଦେବା ଖର୍ଚ୍ଚ = ଟ. $5.50 \times 144 = 792.00$ ଟଙ୍କା (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ-4 : ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତର ପରିଧିର ସମଷ୍ଟି 440 ସେ.ମି. ସେମାନଙ୍କର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର 7 ସେ.ମି. ହେଲେ ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟର ବ୍ୟାସ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । $(\pi \simeq \frac{22}{7})$

ସମାଧାନ :

ମନେକର ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ R ଏବଂ r ସେ.ମି.

$\therefore$ ସେମାନଙ୍କର ପରିଧି ଯଥାକ୍ରମେ $2\pi R$ ସେ.ମି. ଓ $2\pi r$ ସେ.ମି. ହେବ ।

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ $2\pi R + 2\pi r = 440 \Rightarrow 2\pi\ (R + r) = 440$

$$\Rightarrow \frac{44}{7}(R + r) = 440 \Rightarrow R + r = 440 \times \frac{7}{44} = 70 \qquad \text{...........(i)}$$

ପୁନଶ୍ଚ, $R - r = 7$ ....(ii)

(i) ଓ (ii)ରୁ $R = \frac{70+7}{2} = \frac{77}{2} \Rightarrow 2R = 2 \times \frac{77}{2} = 77$ ସେ.ମି.

ସେହିପରି $r = \frac{70-7}{2} = \frac{63}{2} \Rightarrow 2r = 2 \times \frac{63}{2} = 63$ ସେ.ମି.

$\therefore$ ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟର ବ୍ୟାସ 77 ସେ.ମି. ଓ 63 ସେ.ମି.। (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ-5 : ଖଣ୍ଡେ ତାରକୁ ବଙ୍କାଇ ବର୍ଗଚିତ୍ର ଆକୃତି କଲେ ତା'ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 484 ବର୍ଗ ସେ.ମି. ହୁଏ। ଉକ୍ତ ତାରକୁ ବଙ୍କାଇ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ତିଆରି କଲେ ଏହାର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ କେତେ ହେବ ? $(\pi \simeq \frac{22}{7})$

ସମାଧାନ : ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = 484 ବର୍ଗସେ.ମି.

$\Rightarrow$ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = $\sqrt{484}$ = 22 ସେ.ମି.

$\therefore$ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର ପରିସୀମା = $4 \times 22 = 88$ ସେ.ମି.

ମନେକର ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ = r ସେ.ମି. $\Rightarrow$ ପରିଧି = $2\pi r$ ସେ.ମି.

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ, $2\pi r = \frac{44}{7} r = 88 \Rightarrow r = 88 \times \frac{7}{44} = 14$

$\therefore$ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 14 ସେ.ମି.। (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ-6 : କୌଣସି ଏକ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $20\sqrt{3}$ ସେ.ମି.। ତନ୍ମଧ୍ୟରେ ଏକ ବୃତ୍ତ ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ ହେଲେ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ କେତେ ହେବ ?

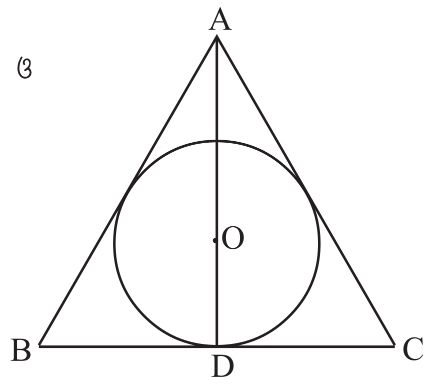
ସମାଧାନ : ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ତଃବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର, ତ୍ରିଭୁଜର ଭରକେନ୍ଦ୍ର ଓ ଲମ୍ବବିନ୍ଦୁ O ଅଭିନ୍ନ ଅଟେ।

ମନେକର ଅନ୍ତଃବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ = r ସେ.ମି.

$\because$ O ଭରକେନ୍ଦ୍ର। AD = 3 OD = 3r

ଉଚ୍ଚତା AD = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ × ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times 20\sqrt{3}$ ସେ.ମି. = 30 ସେ.ମି.



[ଚିତ୍ର 5.4]

$\therefore$ AD = 3r = 30 ସେ.ମି. $\Rightarrow$ r = 10 ସେ.ମି.

$\therefore$ ଅନ୍ତଃବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ = 10 ସେ.ମି. (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ-7 : ଗୋଟିଏ ଚକର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଅନ୍ୟ ଏକ ଚକର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧଠାରୁ 7 ସେ.ମି. ଅଧିକ। 88 ମିଟର ବାଟ ଗଲେ ସାନଚକ ବଡ଼ଚକ ଠାରୁ 100 ଥର ଅଧିକ ଘୂରେ। ଚକଦ୍ୱୟର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର। $\left(\pi \simeq \frac{22}{7}\right)$

ସମାଧାନ : ମନେକର ସାନ ଚକର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ = r ସେ.ମି.। ∴ ବଡ଼ ଚକର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ = (r+7) ସେ.ମି.।

∴ ସାନ ଚକ ଓ ବଡ଼ ଚକର ପରିଧି ଯଥାକ୍ରମେ $2\pi r$ ସେ.ମି. ଓ $2\pi(r+7)$ ସେ.ମି.।

88 ମିଟର ବାଟ ଯିବାପରେ ସାନଚକ ଓ ବଡ଼ଚକର ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ସଂଖ୍ୟା ଯଥାକ୍ରମେ $\frac{8800}{2\pi r}$ ଏବଂ $\frac{8800}{2\pi(r+7)}$ ।

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ, $\frac{8800}{2\pi r} - \frac{8800}{2\pi(r+7)} = 100$

$$\Rightarrow \frac{8800}{2\pi}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+7}\right) = 100 \Rightarrow \frac{8800}{2\pi}\left(\frac{7}{r(r+7)}\right) = 100$$

$$\Rightarrow \frac{7}{r^2+7r} = \frac{2\pi}{88} \Rightarrow \frac{7}{r^2+7r} = \frac{1}{14}$$

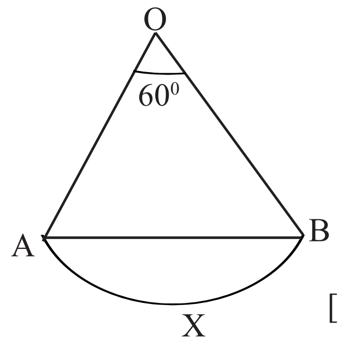
$$\Rightarrow r^2 + 7r - 98 = 0 \Rightarrow (r+14)\,(r-7) = 0$$

$\Rightarrow r = -14$ ବା $r = 7$

∴ ସାନଚକର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ = 7 ସେ.ମି. ଏବଂ ବଡ଼ ଚକର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ

= (7+7) = 14 ସେ.ମି.। (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ-8 : OAXB ବୃତ୍ତକଳାର ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ 60^0 ଏବଂ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O। AOB ତ୍ରିଭୁଜର ପରିସୀମା ଓ ବୃତ୍ତକଳା OAXB ର ପରିସୀମାର ଅନୁପାତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର। $\left(\pi \simeq \sqrt{10}\right)$



[ଚିତ୍ର 5.5]

ସମାଧାନ : ମନେକର ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ = r ଏକକ।

∴ $\widehat{AXB}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = $\frac{60}{180} \times \pi r = \frac{\pi r}{3}$ ଏକକ

$\Rightarrow$ OAXB ବୃତ୍ତକଳାର ପରିସୀମା = OA + OB + $\widehat{AXB}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = $2r + \frac{\pi r}{3} = \left(\frac{\pi+6}{3}\right)r$

AOB ତ୍ରିଭୁଜରେ OA = OB ଏବଂ $m\angle AOB = 60^0$

∴ $m\angle OAB = m\angle OBA = 60^0 \Rightarrow$ AOB ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ।

∴ AOB ତ୍ରିଭୁଜର ପରିସୀମା = 3r ଏକକ।

∴ $\frac{\Delta\, AOB\text{ର ପରିସୀମା}}{OAXB\text{ର ବୃତ୍ତକଳାର ପରିସୀମା}} = \frac{3r}{\left(\frac{\pi+6}{3}\right)r} = \frac{9}{\pi+6} = \frac{9}{\sqrt{10}+6}$ (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5(a)

(ବୃତ୍ତର ପରିଧି ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ)

1. (a) ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ (i) 10 ସେ.ମି., (ii) 2.8 ସେ.ମି., (iii) 14 ସେ.ମି., (iv) 4.2 ସେ.ମି. ହେଲେ ପରିଧି କେତେ ? $(\pi \simeq \frac{22}{7})$

   (b) ବୃତ୍ତର ପରିଧି (i) 34.9 ସେ.ମି., (ii) 1047 ସେ.ମି., (iii) 25.128 ସେ.ମି., (iv) 15.705 ସେ.ମି. ହେଲେ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ କେତେ ? $(\pi \simeq 3{\cdot}141)$

2. ଏକ ବୃତ୍ତର ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ L, ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r, ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ θ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହେଲେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କର ସମାଧାନ କର । $(\pi \simeq \frac{22}{7})$

   (a) $r = 56$ ସେ.ମି., $\theta = 45^0$ ହେଲେ L କେତେ ?

   (b) $L = 110$ ମି., $\theta = 75^0$ ହେଲେ r କେତେ ?

   (c) $2r = 9$ ଡେ.ମି., $L = 22$ ଡେ.ମି. ହେଲେ θ କେତେ ?

3. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର ଦିଅ । $(\pi \simeq \frac{22}{7})$

   (a) କୌଣସି ଏକ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 10.5 ସେ.ମି. ହେଲେ ସେହି ବୃତ୍ତର 11 ସେ.ମି. ପରିମିତ ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ କେତେ ହେବ ?

   (b) 21 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ 72^0 ହେଲେ ଚାପଟିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କେତେ ହେବ ?

   (c) ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ କେତେ ହେଲେ ସେହି ବୃତ୍ତର 11 ସେ.ମି. ପରିମିତ ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ 10^0 ହେବ ।

   (d) ଏକ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧର ଦୈର୍ଘ୍ୟ x ଏକକ, ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ y ଏକକ, ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ z ଡିଗ୍ରୀ ହେଲେ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧର ଦୈର୍ଘ୍ୟ π ମାଧ୍ୟମରେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   (e) r ଏକକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବୃତ୍ତରେ a ଏକକ ଦୀର୍ଘ ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ ହେଲେ a ଏବଂ r ମଧ୍ୟରେ ସଂପର୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. ବିଷୁବରେଖାଠାରେ ପୃଥିବୀର ବ୍ୟାସ 12530 କି.ମି. ହେଲେ ବିଷୁବ ବୃତ୍ତର ପରିଧି କେତେ ? $(\pi \simeq \frac{22}{7})$

5. 44 ମି. ଦୀର୍ଘ ତାରରୁ 5 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ କେତୋଟି ବୃତ୍ତ ତିଆରି କରାଯାଇପାରିବ ? $(\pi \simeq \frac{22}{7})$

6. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତାକାର ରାସ୍ତାର ବାହାର ଓ ଭିତର ପରିଧି ଯଥାକ୍ରମେ 396 ଓ 352 ମିଟର ହେଲେ ରାସ୍ତାର ପ୍ରସ୍ଥ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । $(\pi \simeq \frac{22}{7})$

7. ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତର ପରିଧିର ଅନ୍ତର 44 ମିଟର ଏବଂ ସେମାନଙ୍କର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି 77 ମିଟର ହେଲେ ପରିଧିଦ୍ୱୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । $(\pi \simeq \frac{22}{7})$

8. ଦୁଇଟି ଏକକେନ୍ଦ୍ରିକ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଦ୍ୱୟର ଅନୁପାତ 3 : 4। ସେମାନଙ୍କର ପରିଧିଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି 308 ସେ.ମି. ହେଲେ ବଳୟର ପ୍ରସ୍ଥ କେତେ ହେବ ? $(\pi \simeq \frac{22}{7})$

9. ଗୋଟିଏ ବଳୟ ଆକାରର ରାସ୍ତାର ବାହାର ଓ ଭିତର ବୃତ୍ତର ପରିଧି ଯଥାକ୍ରମେ 300 ମିଟର ଓ 200 ମିଟର ହେଲେ, ରାସ୍ତାର ପ୍ରସ୍ଥ କେତେ ? $(\pi \simeq \sqrt{10})$

10. 7ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତ ଉପରେ କେତେଥର ଘୂରିଲେ 11 କି.ମି. ଦୂରତା ଅତିକ୍ରମ କରିହେବ ? $(\pi \simeq \frac{22}{7})$

11. ଗୋଟିଏ ସାଇକେଲ୍‌ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଚକ ମିନିଟ୍‌ରେ ୫0ଥର ଘୂରନ୍ତି। ଚକର ବର୍ହିବ୍ୟାସ 42 ସେ.ମି. ହେଲେ ସାଇକେଲ୍‌ର ଘଣ୍ଟାପ୍ରତି ବେଗ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର। $(\pi \simeq \frac{22}{7})$

12. ଗୋଟିଏ ଗାଡ଼ିର ବଡ଼ ଚକ ଓ ସାନ ଚକର ପରିଧିର ଅନୁପାତ 4 : 1; 440ମିଟର ରାସ୍ତା ଅତିକ୍ରମ କରିବାରେ ସାନ ଚକ ବଡ଼ ଚକ ଅପେକ୍ଷା 15ଥର ଅଧିକ ଘୂରେ। ପ୍ରତ୍ୟେକ ଚକର ପରିଧି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର। $(\pi \simeq \frac{22}{7})$

13. ଗୋଟିଏ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତାକାର ଜମିର ସୀମାରେ ବାଡ଼ ଦେବା ଖର୍ଚ୍ଚ ମିଟରକୁ 75 ପଇସା ହିସାବରେ 216 ଟଙ୍କା ଖର୍ଚ୍ଚ ହେଲେ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତାକାର ଜମିର ବ୍ୟାସ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର। $(\pi \simeq \frac{22}{7})$

14. ଗୋଟିଏ ଘୋଡ଼ା ବୃତ୍ତ ଉପରେ ଥରେ ଘୂରିଆସି ସିଧା ଯାଇ କେନ୍ଦ୍ରରେ ପହଞ୍ଚିବା ପାଇଁ ତାକୁ 10 ମିନିଟ୍ 12 ସେକେଣ୍ଡ ସମୟ ଲାଗିଲା। ସେ କେବଳ ବୃତ୍ତ ଉପରେ ଘୂରିଥିଲେ ତାକୁ କେତେ ସମୟ ଲାଗିଥାନ୍ତା ? $(\pi \simeq \frac{22}{7})$

15. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଉପରେ ଥରେ ଭ୍ରମଣ କରିବାକୁ ଯେତେ ସମୟଲାଗେ ବୃତ୍ତଟିର ବ୍ୟାସ ପରିମିତ ପଥ ଅତିକ୍ରମ କରିବାକୁ 45 ସେକେଣ୍ଡ କମ୍ ଲାଗେ। ଯଦି ଲୋକଟିର ବେଗ ଏକ ମିନିଟ୍‌ରେ ୫0 ମିଟର ହୁଏ ତେବେ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସ କେତେ ହେବ ? $(\pi \simeq \frac{22}{7})$

16. ଖଣ୍ଡେ ତାରକୁ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜାକୃତି କଲେ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $1936\sqrt{3}$ ବ.ମି.ହୁଏ। ଉକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜର ପରିସୀମା ସହ ସମାନ ପରିଧି ଥିବା ବୃତ୍ତଟିର ବ୍ୟାସ କେତେ ହେବ ? $(\pi \simeq \frac{22}{7})$

17. 20 ସେ.ମି. ଦୀର୍ଘ ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ର ମଧ୍ୟରେ ଏକ ବୃତ୍ତ ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ ହେଲେ ବୃତ୍ତର ପରିଧି କେତେ ହେବ ? $(\pi \simeq 3{\cdot}14)$

18. 42 ସେ.ମି. ଦୀର୍ଘ ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ପରିଲିଖିତ ଓ ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ ବୃତ୍ତର ପରିଧି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର। $(\pi \simeq \frac{22}{7})$

19. (a) 21 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବୃତ୍ତକଳାର ପରିସୀମା 64 ସେ.ମି. ହେଲେ, ବୃତ୍ତକଳାର ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ ସ୍ଥିର କର। $(\pi \simeq \frac{22}{7})$

(b) ଏକ ବୃତ୍ତରେ ଯେଉଁ ବୃତ୍ତକଳାର ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ 40^0, ସେହି ବୃତ୍ତକଳାର ପରିସୀମା 26.98 ସେ.ମି. ହେଲେ, ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ କେତେ ? $(\pi \simeq 3{\cdot}14)$

20. କୌଣସି ଏକ ବୃତ୍ତକଳାର କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ 90^0 । ଏହାର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 5 ସେ.ମି. ହେଲେ ବୃତ୍ତକଳାର ପରିସୀମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର। $(\pi \simeq 3.1416)$

21. କୌଣସି ଏକ ବୃତ୍ତର ଏକ ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ 40^0 ଏବଂ ଅନ୍ୟ ଏକ ବୃତ୍ତର ସମ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ 60^0 ହେଲେ ଉଭୟ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧର ଅନୁପାତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

22. ଗୋଟିଏ ଘଣ୍ଟାର ମିନିଟ୍ କଣ୍ଟାର ଅଗ୍ରଭାଗ 5 ମିନିଟ୍‌ରେ $7\frac{1}{3}$ ସେ.ମି. ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ଚାପ ଅଙ୍କନ କରେ । ମିନିଟ୍ କଣ୍ଟାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । $(\pi \simeq \frac{22}{7})$

23. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ପରିଧି ଅନ୍ୟ ଏକ ବୃତ୍ତର ପରିଧିର ତିନିଗୁଣ । ପ୍ରଥମ ବୃତ୍ତର 10 ସେ.ମି. ପରିମିତ ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ 30^0 ହେଲେ ଦ୍ୱିତୀୟ ବୃତ୍ତର ପରିଧି କେତେ ହେବ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । $(\pi \simeq \frac{22}{7})$

24. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ପରିଧି 6.282 ହେଲେ ଓ ଏହା ଏକ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ମଧ୍ୟରେ ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କେତେ ? $(\pi \simeq 3{\cdot}141)$

25. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତକଳାର ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ 60^0 । ଏହାର ଦୁଇ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଓ ଚାପକୁ ସ୍ପର୍ଶ କରି ଏକ ବୃତ୍ତ ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ । ପ୍ରମାଣ କରଯେ, ଏହି ବୃତ୍ତର ପରିଧି ଓ ବୃତ୍ତକଳାର ପରିସୀମାର ଅନୁପାତ 11:16 । $(\pi \simeq \frac{22}{7})$

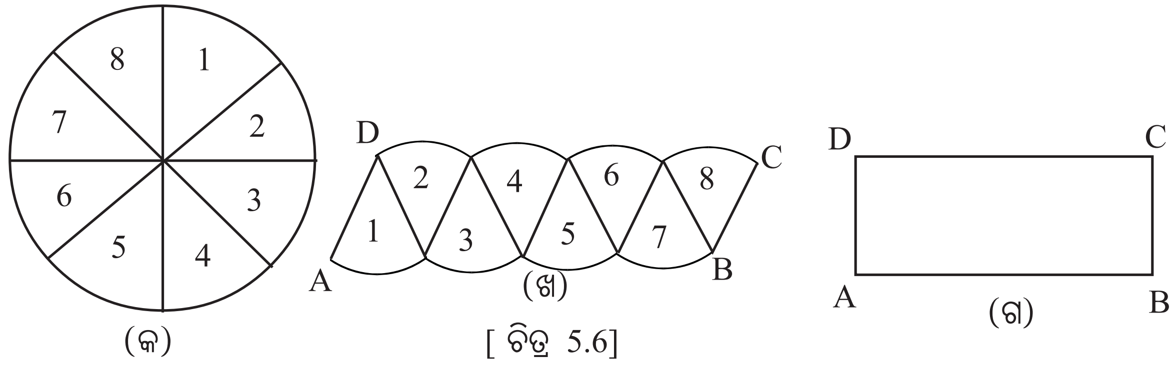
5.3 ବୃତ୍ତ, ବୃତ୍ତକଳା ଓ ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ (Area of a circle, sector and a segment) :

ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରର ମାପକୁ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ କୁହାଯାଏ ଯାହା ଏକ ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା । ପୂର୍ବରୁ, ସରଳରୈଖିକ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଯଥା- ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପାଇଁ ଭୂମି ଓ ଉଚ୍ଚତା ଦୁଇଟିର ମାପ, ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପାଇଁ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ପ୍ରସ୍ଥ ଦୁଇଟିର ମାପ ଆବଶ୍ୟକ ବୋଲି ଜାଣିଛ । ବର୍ତ୍ତମାନ ବୃତ୍ତ, ବୃତ୍ତକଳାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଏବଂ ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

5.3.1. ବୃତ୍ତାକାର କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ (Determining the area of a circular region) :

ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଏବଂ ଏହାର ଅନ୍ତର୍ଦେଶର ସଂଯୋଗକୁ ଏକ **ବୃତ୍ତାକାର କ୍ଷେତ୍ର (circular region)** କୁହାଯାଏ । ଏହାର ମାପକୁ ବୃତ୍ତାକାର କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ କୁହାଯାଏ । ପ୍ରୟୋଗର ସୁବିଧା ଦୃଷ୍ଟିରୁ ବୃତ୍ତାକାର କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳକୁ ବୃତ୍ତର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ମଧ୍ୟ କୁହାଯାଏ ।

ନିମ୍ନସ୍ଥ ଚିତ୍ରପରି ମନେକର ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତକୁ ସମାନ କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ ବିଶିଷ୍ଟ ଯୁଗ୍ମସଂଖ୍ୟକ ଖଣ୍ଡରେ କାଟି ନିମ୍ନ ଚିତ୍ରପରି ସଜାଇ ABCD କ୍ଷେତ୍ର ସୃଷ୍ଟି କରାଯାଉ ।



[ଚିତ୍ର 5.6]

ବର୍ତ୍ତମାନ ABCD କ୍ଷେତ୍ରଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସହିତ ବୃତ୍ତର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସମାନ ହେବ। ଖଣ୍ଡ ସଂଖ୍ୟା ଯେତେ ଅଧିକ ହେବ ଚାପଗୁଡ଼ିକ ସେତେ ସରଳ (straight) ହେବ ଏବଂ ABCD ପ୍ରାୟତଃ ଏକ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରରେ ପରିଣତ ହେବ। ଖଣ୍ଡସଂଖ୍ୟା ଅସୀମ ହେଲେ ABCD କ୍ଷେତ୍ରର ଚରମ ପରିଣତି ଗୋଟିଏ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର ହେବ। ଏହି ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ AB ବୃତ୍ତର ଅର୍ଦ୍ଧ ପରିଧି ସହ ଏବଂ ପ୍ରସ୍ଥ AD ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ସହିତ ସମାନ ହେବ।

$\therefore$ ଉକ୍ତ ଆୟତ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = AB × AD = ଅର୍ଦ୍ଧ ପରିଧି × ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ।

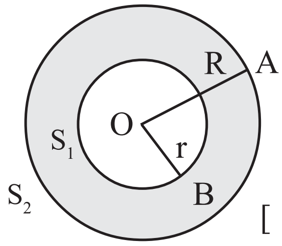
$\therefore$ ବୃତ୍ତର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ଅର୍ଦ୍ଧପରିଧି × ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ।

ବୃତ୍ତର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ A ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r ଏକକ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହେଲେ $A = \pi r \cdot r = \pi r^2$

$\therefore$ $A = \pi r^2$ ବର୍ଗ ଏକକ ଅର୍ଥାତ୍ ବୃତ୍ତର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\pi \times$ (ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)^2 ବର୍ଗ ଏକକ

5.3.2. ବୃତ୍ତୀୟ ବଳୟର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ (Area of a circular annulus) :

ଚିତ୍ର 5.7 ରେ S_1 ଓ S_2 ଦୁଇଟି ଏକକେନ୍ଦ୍ରିକ ବୃତ୍ତ ଏବଂ O ସେମାନଙ୍କର କେନ୍ଦ୍ର । S_1 ଓ S_2 ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଯଥାକ୍ରମେ r ଏବଂ R ଏକକ, $(R > r)$ । ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟ ଦ୍ୱାରା ଏକ ବଳୟ ସୃଷ୍ଟି ହୋଇଛି । ଏହାକୁ **ବୃତ୍ତୀୟ ବଳୟ (Circular annulus)** କୁହାଯାଏ ।



[ଚିତ୍ର 5.7]

ଏଠାରେ ଉକ୍ତ ବଳୟର ଅନ୍ତଃବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ OB = r ଏକକ, ବହିଃବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ OA = R ଏକକ ହିସାବରେ ଗ୍ରହଣ କରାଯାଏ । ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟ ଦ୍ୱାରା ଆବଦ୍ଧ (ଅନ୍ତଃବୃତ୍ତର ବର୍ହିଦେଶ ଏବଂ ବହିଃବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦେଶର ଛେଦ) କ୍ଷେତ୍ରକୁ ବଳୟାକୃତି କ୍ଷେତ୍ର (Annular Region) କୁହାଯାଏ ।

$\therefore$ ବଳୟର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ବହିଃ ବୃତ୍ତର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ – ଅନ୍ତଃ ବୃତ୍ତର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$= \pi R^2 - \pi r^2 = \pi\ (R^2 - r^2)$ ବର୍ଗ ଏକକ

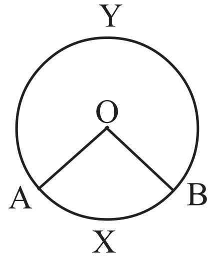
ସୁତରାଂ **ବୃତ୍ତୀୟ ବଳୟର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\pi\ (R^2 - r^2)$ ବର୍ଗ ଏକକ**

5.3.3. ବୃତ୍ତକଳାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ (Area of a sectorial region) :

ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର-5.8କୁ ଲକ୍ଷ୍ୟକର। ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର 'O'। $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଏବଂ $\widehat{AXB}$ ଚାପର ସଂଯୋଗରେ ବୃତ୍ତକଳାର ସୃଷ୍ଟି। ଏହାକୁ OAXB ରୂପେ ନାମିତ କରାଯାଏ। OAYB ମଧ୍ୟ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ୟ ଏକ ବୃତ୍ତକଳା।

ତୁମେ ଜାଣିଛ ଯେ, OAXB ବୃତ୍ତକଳାର ପରିସୀମା

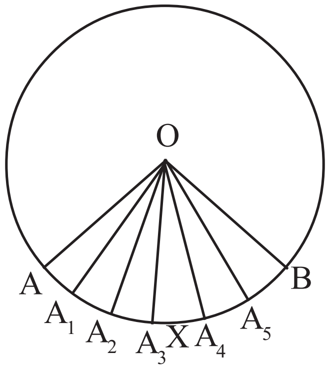
= OA ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ + $\widehat{AXB}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ + OB ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ।



[ଚିତ୍ର 5.8]

OAXB ବୃତ୍ତକଳା ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ର ଚାପ $\widehat{AXB}$ ସହ ସଂଯୁକ୍ତ ହେଲେ, $\overleftrightarrow{OA}$ ର B-ପାର୍ଶ୍ୱ, $\overleftrightarrow{OB}$ ର A-ପାର୍ଶ୍ୱ ଏବଂ AXB ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦେଶର ସାଧାରଣ ଅଂଶକୁ **ବୃତ୍ତକଳାର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ** କୁହାଯାଏ। OAXB ବୃତ୍ତକଳା ଓ ଏହାର ଅନ୍ତର୍ଦେଶର ସଂଯୋଗରେ ଗଠିତ ସେଟ୍‌କୁ OAXB **ବୃତ୍ତକଳାଦ୍ୱାରା ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ର (Sectorial Region)** କୁହାଯାଏ। ଏଠାରେ ମନେରଖ ଯେ, **ବୃତ୍ତ ଓ ବୃତ୍ତକଳାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଏକ ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା।**

ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ OAXB ଏକ ବୃତ୍ତକଳା। $\overset{\frown}{AXB}$ ଚାପରେ A_1, A_2, A_3....... ଏହିପରି ଯଥେଷ୍ଟ ଅଧିକ ସଂଖ୍ୟକ ବିନ୍ଦୁ ନେଇ ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକୁ O ବିନ୍ଦୁ ସହିତ ଯୋଗ କରାଯାଉ। ଫଳରେ AOA_1, A_1OA_2........ଇତ୍ୟାଦି ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ କ୍ଷୁଦ୍ର ବୃତ୍ତକଳାରେ ପରିଣତ ହେବ। ବର୍ତ୍ତମାନ ଚିତ୍ର 5.9ରେ ଅଙ୍କିତ ଗୋଟିଏ କ୍ଷୁଦ୍ର ବୃତ୍ତକଳା AOA_1 କଥା ବିଚାର କରାଯାଉ। $\overline{AA_1}$ ଜ୍ୟା ଅଙ୍କନ କଲେ AOA_1 ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜ ହେବ। (ଚିତ୍ର 5.10 ଦେଖ) ଚାପଟି ଅତି କ୍ଷୁଦ୍ର ହେଲେ $\overline{AA_1}$ ଜ୍ୟାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $\overset{\frown}{AXA_1}$ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସହ ପ୍ରାୟ ସମାନ ହେବ ଏବଂ ତ୍ରିଭୁଜର ଉଚ୍ଚତା OD ପ୍ରାୟତଃ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ OA ସହିତ ସମାନ ହେବ। ପୁନଶ୍ଚ ବୃତ୍ତକଳା AOA_1ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ, ΔAOA_1ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସହ ପ୍ରାୟ ସମାନ ହେବ।



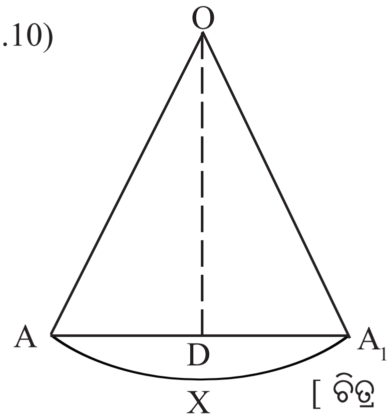
[ଚିତ୍ର 5.9]

$\therefore$ ΔOAA_1 ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2} \times AA_1 \times AD$ (ଚିତ୍ର 5.10)

= $\frac{1}{2} \times \overset{\frown}{AA_1}$ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ × ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ = $\frac{1}{2} l_1 r$

(ମନେକର $\overset{\frown}{AXA_1}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = l_1)

ସେହିପରି OA_1A_2, OA_2A_3....... ଇତ୍ୟାଦି କ୍ଷୁଦ୍ର ବୃତ୍ତକଳାମାନଙ୍କର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଆସନ୍ନମାନ ଯଥାକ୍ରମେ $\frac{1}{2} l_2 r$, $\frac{1}{2} l_3 r$............ ଇତ୍ୟାଦି ହେବ।



[ଚିତ୍ର 5.10]

ବର୍ତ୍ତମାନ ସମସ୍ତ କ୍ଷୁଦ୍ର ବୃତ୍ତକଳାମାନଙ୍କର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ସମଷ୍ଟି

$$= \frac{1}{2} l_1 r + \frac{1}{2} l_2 r + \frac{1}{2} l_3 r + ... = \frac{1}{2}(l_1 + l_2 + l_3 + ...) r = \frac{1}{2} l r$$

(ଯେଉଁଠାରେ $\overset{\frown}{AXB}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = l ଏକକ)

$\therefore$ ବୃତ୍ତକଳାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2} l r$ ବର୍ଗ ଏକକ

ଅର୍ଥାତ୍ **ବୃତ୍ତକଳାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}$ × ବୃତ୍ତକଳାର ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ × ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ**

ପୁନଶ୍ଚ, ଚାପଟିର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ θ^0 ଏବଂ ବୃତ୍ତର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ 360^0 ହେଲେ ବୃତ୍ତକଳାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$$= \frac{1}{2} l r = \frac{1}{2} . \frac{\theta}{360^0} \times 2\pi r \times r = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 \quad \left(\because\ l = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r\right)$$

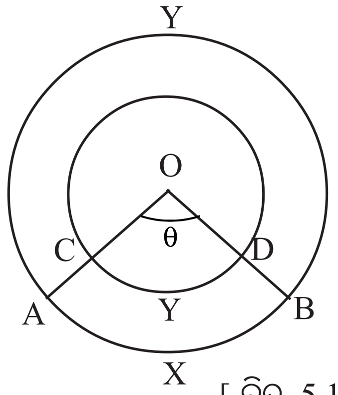
$\therefore$ **ବୃତ୍ତକଳାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{\theta}{360^0} \times \pi r^2$** ଅର୍ଥାତ୍ **ବୃତ୍ତକଳାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{\theta}{360^0}$ × ବୃତ୍ତର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ।**

ବି.ଦ୍ର. : ବୃତ୍ତକଳାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟର ଅନୁରୂପ ପଦ୍ଧତି ଅବଲମ୍ବନରେ ବୃତ୍ତର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ସମ୍ଭବ।

ମନ୍ତବ୍ୟ : (i) OAXB ବୃତ୍ତକଳାର $\overset{\frown}{AXB}$ ଚାପର ରେଡ଼ିୟାନ୍ ପରିମାପ θ^c, ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r ଏବଂ $\overset{\frown}{AXB}$ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ℓ ହେଲେ, $\theta^c = \frac{\ell}{r}$ ହେବ। ($\because \pi^c = 180^0$)

(ii) OAXB ବୃତ୍ତକଳାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}\ell r = \frac{1}{2}\theta^c r^2$ ($\because \theta^c = \frac{\ell}{r}$) ହେବ।

ବୃତ୍ତକଳାଦ୍ୱୟର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଅନ୍ତର :



[ଚିତ୍ର 5.11]

ଦୁଇଟି ଏକକେନ୍ଦ୍ରିକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର 'O'। OAXB ଏବଂ OCYD ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତକଳା। ସେମାନଙ୍କର ଚାପମାନଙ୍କର ସମାନ ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ (θ) ବିଶିଷ୍ଟ। ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ = R ଏକକ ଏବଂ r ଏକକ।

$\therefore$ ବୃତ୍ତକଳାଦ୍ୱୟର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଅନ୍ତର

= OAXB ବୃତ୍ତକଳାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ − OCYD ବୃତ୍ତକଳାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$$= \frac{\theta}{360^0}\cdot\pi R^2 - \frac{\theta}{360}\cdot\pi r^2 = \frac{\theta}{360^0}\pi\ (R^2 - r^2)$$

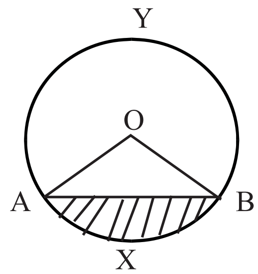
$$= \frac{\theta}{360^0}\cdot\pi(R + r)\ (R - r) = \frac{1}{2}\cdot(R - r)\cdot\left[\frac{\theta}{360}\cdot 2\pi\ (R + r)\right]$$

= $\frac{1}{2}$ × ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର × ଚାପଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି କିମ୍ବା,

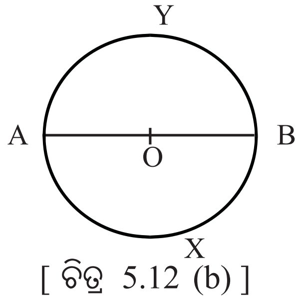
= $\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\theta}{360}\cdot 2\pi\ (R - r)\right](R + r) = \frac{1}{2}$ × ଚାପଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର × ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି।

5.3.4 ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ (Area of a segment) :

ବୃତ୍ତର ଏକ ଜ୍ୟା ଏବଂ ଜ୍ୟା ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଏକ ଚାପର ସଂଯୋଗରେ ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡ ଗଠିତ ହୁଏ । ଚିତ୍ର 5.12(a) ରେ AXBA ଏକ ବୃତ୍ତ ଖଣ୍ଡ । ଏହା $\overset{\frown}{AXB}$ କ୍ଷୁଦ୍ର ଚାପ ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଥିବାରୁ ଏହାକୁ **କ୍ଷୁଦ୍ର ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡ (minor segment)** କୁହାଯାଏ, ଏବଂ AYBA କୁ **ବୃହତ୍ ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡ (major segment)** କୁହାଯାଏ । ଯଦି $\overline{AB}$ ବୃତ୍ତର ଏକ ବ୍ୟାସ ହୁଏ, [ଚିତ୍ର 5.12(b)] ତେବେ $\overset{\frown}{AXB}$ ଏବଂ $\overset{\frown}{AYB}$ ଦ୍ୱାରା ଗଠିତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡକୁ **ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ ଖଣ୍ଡ** କୁହାଯାଏ । ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡ ଦ୍ୱାରା ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳକୁ ସଂକ୍ଷେପରେ ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ **(Area of a segment)** କୁହାଯାଏ ।



[ଚିତ୍ର 5.12 (a)]



[ଚିତ୍ର 5.12 (b)]

ଚିତ୍ର 5.12(a) ରେ AXBA ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

= OAXB ବୃତ୍ତକଳାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ - ΔOAB ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

ବୃହତ୍ ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡ AYBA ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ବୃତ୍ତର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ - କ୍ଷୁଦ୍ର ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡ AXBA ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ।

ସମାହିତ ପ୍ରଶ୍ନାବଳୀ

ଉଦାହରଣ - 9: ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ପରିଧି 352 ମି. ହେଲେ ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ କେତେ ହେବ ? ($\pi \simeq \frac{22}{7}$)

ସମାଧାନ : ମନେକର ବୃତ୍ତଟିର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r ମିଟର $\Rightarrow$ ବୃତ୍ତର ପରିଧି = $2\pi r$ ମି.

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ $2\pi r = 352 \Rightarrow r = \frac{352}{2\pi} = \frac{352 \times 7}{2 \times 22} = 56$ ମି.

ବୃତ୍ତଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\pi r^2 = \frac{22}{7} \times 56^2 = 9856$ ବ.ମି. (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ-10: ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 2464 ବ.ଡେକା.ମି. ହେଲେ ଏହାର ବ୍ୟାସ ଓ ପରିଧି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ($\pi \simeq \frac{22}{7}$)

ସମାଧାନ : ମନେକର ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r ଡେକା.ମି. $\Rightarrow$ ବୃତ୍ତର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = πr^2 ବର୍ଗ ଡେକା.ମି.

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ $\pi r^2 = 2464 \Rightarrow r^2 = \frac{2464}{\pi} = \frac{2464 \times 7}{22} = 784$ ବ.ମି.

$\Rightarrow r = \sqrt{784} = 28$

$\therefore$ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସ = $2r = 2 \times 28 = 56$ ଡେକା.ମି. ଏବଂ

ବୃତ୍ତର ପରିଧି = $2\pi r = 2 \times \frac{22}{7} \times 28 = 176$ ଡେକା.ମି. (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ-11 : 224 ମିଟର ବ୍ୟାସ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତାକାର ଘାସ ପଡ଼ିଆ ମଧ୍ୟରେ ତାହାର ବାହାର ସୀମାକୁ ଲାଗି ଗୋଟିଏ ବଳୟାକାର ପଥ ଅଛି । ପଥଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $2425\frac{1}{2}$ ବର୍ଗମିଟର ହେଲେ ଏହାର ପ୍ରସ୍ଥ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ($\pi \simeq \frac{22}{7}$)

ସମାଧାନ : ସମୁଦାୟ ଘାସ ପଡ଼ିଆର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ = ବାହାର ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ (R) = $\frac{1}{2} \times 224$ମି = 112ମି.

ମନେକର ଭିତର ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ = r ମିଟର

$\therefore$ ପଥଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\pi(R^2 - r^2) = \frac{22}{7}(112^2 - r^2)$ ବର୍ଗମିଟର

କିନ୍ତୁ ପଥଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $2425\frac{1}{2} = \frac{4851}{2}$ ବ.ମି. (ଦତ୍ତ)

$\therefore \frac{22}{7}(112^2 - r^2) = \frac{4851}{2} \Rightarrow 112^2 - r^2 = \frac{4851}{2} \times \frac{7}{22} = \frac{3087}{4}$

$\Rightarrow r^2 = 112^2 - \dfrac{3087}{4} = 12544 - \dfrac{3087}{4} \Rightarrow r^2 = \dfrac{47089}{4}$

$\Rightarrow r = \dfrac{217}{2} = 108\dfrac{1}{2} = 108.5$ ମିଟର।

$\therefore$ ପଥଟିର ପ୍ରସ୍ଥ $= R - r = 112 - 108.5 = 3.5$ ମିଟର (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ-12 : ଗୋଟିଏ ଲୁହାତାର ଦ୍ୱାରା ଗଠିତ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 24649 ବର୍ଗ ସେ.ମି.। ଏହାକୁ ବଙ୍କାଇ ବୃତ୍ତରେ ପରିଣତ କଲେ ବୃତ୍ତଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ କେତେ ହେବ ? ($\pi \simeq 3.14$)

ସମାଧାନ : ବର୍ଗ କ୍ଷେତ୍ରଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = 24649 ବର୍ଗ ସେ.ମି. ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = $\sqrt{24649} = 157$ ସେ.ମି.

ଏହାର ପରିସୀମା $= 157 \times 4 = 628$ ସେ.ମି.

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ ବୃତ୍ତର ପରିସୀମା $2\pi r = 628 \Rightarrow r = \dfrac{628}{2\times 3.14} = 100$ ସେ.ମି.

$\therefore$ ବୃତ୍ତର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\pi(100)^2 = 3.14 \times (100)^2 = 31400$ ବର୍ଗ ସେ.ମି.। (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ-13 : ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ କୌଣସି ବୃତ୍ତକଳାର ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ 60^0। ଯଦି ବୃତ୍ତଟିର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 21 ସେ.ମି. ହୁଏ, ତେବେ ବୃତ୍ତକଳାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର। ($\pi \simeq \frac{22}{7}$)

ସମାଧାନ : ବୃତ୍ତଟିର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $r = 21$ ସେ.ମି., ବୃତ୍ତକଳାର ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ $\theta = 60^0$

ବୃତ୍ତକଳାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\dfrac{\theta}{360^0} \times \pi r^2 = \dfrac{60}{360} \times \dfrac{22}{7} \times 21^2$

$= 231$ ବର୍ଗ ସେ.ମି. । (ଉତ୍ତର)

ବିକଳ୍ପ ସମାଧାନ : $60^0 = \dfrac{\pi^C}{3}$, $l = \theta^C \times r = 7\pi$

$\therefore$ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\dfrac{1}{2} lr = \dfrac{1}{2} \times 7\pi \times 21 = 231$ ବର୍ଗ ସେ.ମି. (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ-14 : କୌଣସି ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 30 ସେ.ମି. ଏବଂ ଏହାର ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତକଳାର ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 18 ସେ.ମି.; ବୃତ୍ତକଳାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ : ବୃତ୍ତଟିର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $(r) = 30$ ସେ.ମି., ବୃତ୍ତକଳାର ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $(l) = 18$ ସେ.ମି.

ବୃତ୍ତକଳାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\dfrac{1}{2} lr = \dfrac{1}{2} \times 18 \times 30$

$= 270$ ବର୍ଗ ସେ.ମି. (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ-15 : ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଓ ଏହାର ଏକ ବୃତ୍ତକଳାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଯଥାକ୍ରମେ 9856 ବ.ସେ.ମି. ଓ 1400 ବ.ସେ.ମି. ହେଲେ, ବୃତ୍ତକଳାର ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିରୂପଣ କର। ($\pi \simeq \frac{22}{7}$)

ସମାଧାନ : ମନେକର ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r ଓ ବୃତ୍ତକଳାର ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ l।

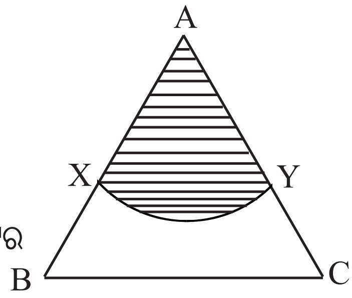
$\therefore \pi r^2 = 9856 \Rightarrow r^2 = 9856 \times \dfrac{7}{22} \Rightarrow r = \sqrt{448 \times 7} = 56$ ସେ.ମି.

ବୃତ୍ତକଳାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = 1400 ବ.ସେ.ମି. $\Rightarrow \frac{1}{2}lr = 1400$

$\Rightarrow l = \frac{2 \times 1400}{56} = 50$ ସେ.ମି. (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ-16 : ଗୋଟିଏ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜାକାର କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 726 ବର୍ଗମିଟର। ଏହାର ଗୋଟିଏ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁରେ ଚେନ୍‌ଦ୍ୱାରା ବନ୍ଧା ହୋଇଥିବା ଏକ ଘୋଡ଼ା ତ୍ରିଭୁଜର ଅର୍ଦ୍ଧପରିମାଣ ସ୍ଥାନରେ ଚରିପାରେ। ଚେନ୍‌ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଆସନ୍ନ ସେ.ମି. ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର। ($\pi \simeq \frac{22}{7}$)

ସମାଧାନ : ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ ଘୋଡ଼ାଟି ଚରିପାରୁଥିବା ଅଂଶକୁ ରେଖାଖଣ୍ଡମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଚିହ୍ନିତ କରାଯାଇଛି ଏବଂ ଏହା ଏକ ବୃତ୍ତକଳାକାର କ୍ଷେତ୍ର।



[ଚିତ୍ର 5.13]

ମନେକର ଏହାର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ AX = r

$\therefore$ ବୃତ୍ତକଳାର ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = $\frac{\pi}{180} \times 60 \times r = \frac{\pi r}{3}$ ମି.

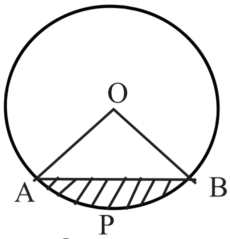
ବୃତ୍ତକଳାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}lr = \frac{1}{2} \times \frac{\pi r}{3} \times r = \frac{\pi r^2}{6}$ ବର୍ଗ ମିଟର

ମାତ୍ର ବୃତ୍ତକଳାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2} \times 726 = 363$ ବ.ମି.

$\therefore \frac{\pi r^2}{6} = 363 \Rightarrow r^2 = \frac{363 \times 6 \times 7}{22} \Rightarrow r = \sqrt{693}$ = 26 ମିଟର 23 ସେ.ମି. (ଆସନ୍ନମାନ)

ଉଦାହରଣ - 17 : ଏକ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 28 ସେ.ମି. ହେଲେ ଏହାର କେନ୍ଦ୍ରରେ 90^0 କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରୁଥିବା ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିରୂପଣ କର ।($\pi \simeq \frac{22}{7}$)

ସମାଧାନ : ଚିତ୍ର 5.14 ରେ APBA ଏକ ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡ ଏବଂ $m\angle AOB = 90^0$ ।



[ଚିତ୍ର 5.14]

ମନେକର $\widehat{APB}$ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = l ଏକକ

ବର୍ତ୍ତମାନ $\widehat{APB}$ ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ $\theta = 90^0$

ଏବଂ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $r = 28$ ସେ.ମି.

OAPB ବୃତ୍ତକଳାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2 = \frac{90}{360} \times \frac{22}{7} \times (28)^2 = 616$ ବ.ସେ.ମି.

OAB ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}.OA.OB = \frac{1}{2} \times 28 \times 28 = 392$ ବ.ସେ.ମି.

$\therefore$ APBA ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = OAPB ବୃତ୍ତକଳାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ – OAB ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

= $(616 - 392)$ ବ.ସେ.ମି. = 224 ବ.ସେ.ମି. (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5(b)

[ଆବଶ୍ୟକସ୍ଥଳେ ($\pi \simeq \frac{22}{7}$) ନେଇ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକ ସମାଧାନ କର]

1. ବୃତ୍ତର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେଉଁ ବୃତ୍ତର

   (i) ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 31.5 ମିଟର (ii) ବ୍ୟାସ 112 ସେ.ମି.

   (iii) ପରିଧି 286 ସେ.ମି. (iv) ଅର୍ଦ୍ଧ ପରିଧି 44 ମି.

2. (i) ବୃତ୍ତର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 154 ବର୍ଗମିଟର ହେଲେ, ଏହାର ବ୍ୟାସର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

   (ii) ବୃତ୍ତର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 7546 ବର୍ଗ ମିଟର ହେଲେ, ଏହାର ପରିଧି କେତେ ?

3. ବୃତ୍ତକଳାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେଉଁ ବୃତ୍ତକଳାର

   (i) ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ 120^0, ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 28 ସେ.ମି.

   (ii) ସଂପୃକ୍ତ ବୃତ୍ତର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 7546 ବର୍ଗ ମି. ଓ ସଂପୃକ୍ତ ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ 105^0।

   (iii) ସଂପୃକ୍ତ ବୃତ୍ତର ପରିଧି 396 ମିଟର ଏବଂ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 36 ମିଟର।

   (iv) ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 66 ମିଟର ଏବଂ ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ 70^0।

4. ବୃତ୍ତକଳାର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯାହାର

   (i) କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 1848 ବର୍ଗ ମିଟର ଓ ସଂପୃକ୍ତ ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ 120^0।

   (ii) କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 48.4 ବର୍ଗ ଡେକାମିଟର ଓ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 121 ମିଟର।

5. ବୃତ୍ତକଳାର ସଂପୃକ୍ତ ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

   (i) ଯାହାର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 36 ମିଟର, କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 792 ବର୍ଗ ମିଟର।

   (ii) ଯାହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 924 ବର୍ଗ ସେ.ମି. ଓ ସଂପୃକ୍ତ ବୃତ୍ତର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 2464 ବର୍ଗ ସେ.ମି.

   (iii) ଯାହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 231 ବର୍ଗ ମିଟର ଏବଂ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 22 ମିଟର।

6. ଦୁଇଟି ଏକକେନ୍ଦ୍ରିକ ବୃତ୍ତର ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ ସମାନ ହେଲେ ସଂପୃକ୍ତ ବୃତ୍ତକଳାଦ୍ୱୟର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଅନ୍ତର କେତେ ହେବ ଯେତେବେଳେ

   (i) ଚାପ ଦୁଇଟିର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନ୍ତର 25 ମି. ଓ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି 80 ମି.

   (ii) ଚାପ ଦୁଇଟିର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟି 50 ସେ.ମି. ଓ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର 24 ସେ.ମି.

7. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ x ବର୍ଗ ଏକକ। ଏହାର

   (i) ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କେତେ ?

   (ii) ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ ବର୍ଗଚିତ୍ରର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କେତେ ?

   (iii) ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କେତେ ?

8. ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଯଥାକ୍ରମେ 42 ସେ.ମି. ଓ 56 ସେ.ମି.। ଅନ୍ୟ ଏକ ତୃତୀୟ ବୃତ୍ତର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ପ୍ରଥମୋକ୍ତ ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ସମଷ୍ଟି ସହିତ ସମାନ ହେଲେ ତୃତୀୟ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

9. ଗୋଟିଏ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସହିତ ସମାନ। ସେମାନଙ୍କର ପରିସୀମାର ଅନୁପାତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

10. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 5 ସେ.ମି.। ଏହାର 9 ଗୁଣ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ କେତେ ?

11. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ପରିଧି ଯେତେ ଏକକ ଏହାଦ୍ୱାରା ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସେତିକି ବର୍ଗ ଏକକ ହେଲେ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ କେତେ ?

12. ଗୋଟିଏ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ C ବର୍ଗ ଏକକ। ଏହାର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଓ ପରିଲିଖିତ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ କେତେ ?

13. ପ୍ରମାଣ କର ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଗୋଟିଏ ସମବାହୁ Δ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସହିତ ସମାନ ହେଲେ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଓ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନୁପାତ $\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4\pi}}$: 1 ହେବ।

14. ଗୋଟିଏ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତାକାର କ୍ଷେତ୍ରର ପରିସୀମା 252 ସେ.ମି. ହେଲେ ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

15. ଗୋଟିଏ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତର ପରିସୀମା ବ୍ୟାସ ଅପେକ୍ଷା 44 ମିଟର ଅଧିକ ହେଲେ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତାକାର କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ କେତେ ?

16. ଗୋଟିଏ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତାକାର ପଡ଼ିଆର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 2772 ବର୍ଗ ମିଟର। ଏହି ପଡ଼ିଆକୁ ବାଡ଼ ଦ୍ୱାରା ଆବଦ୍ଧ କରିବାକୁ ହେଲେ ମିଟର ପ୍ରତି 37 ପଇସା ଦରରେ କେତେ ଖର୍ଚ୍ଚ ହେବ ?

17. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତାକାର ରାସ୍ତାର ବାହାର ଓ ଭିତର ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସ ଯଥାକ୍ରମେ 56 ସେ.ମି. ଓ 42 ସେ.ମି.। ରାସ୍ତାଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

18. 32 ମିଟର ବ୍ୟାସ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତାକାର ବଗିଚା ମଧ୍ୟରେ ତାହାର ସୀମାକୁ ଲାଗି ଗୋଟିଏ ରାସ୍ତା ନିର୍ମିତ ହୋଇଛି। ରାସ୍ତାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 352 ବର୍ଗ ମିଟର ହେଲେ ଏହାର ପ୍ରସ୍ଥ କେତେ ?

19. ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତର ପରିଧିର ସମଷ୍ଟି 220 ସେ.ମି.। କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଅନ୍ତର 770 ବର୍ଗ ସେ.ମି। ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

20. ଗୋଟିଏ ଲୁହା ତାରକୁ ବର୍ଗାକୃତି କଲେ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 484 ବର୍ଗ ସେ.ମି. ହୁଏ। ଯଦି ଏହାକୁ ବୃତ୍ତାକୃତି କରାଯାଏ ତେବେ ବୃତ୍ତଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ କେତେ ହେବ ?

21. ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସର ଅନୁପାତ 4 : 5। ଯଦି ପ୍ରଥମ ବୃତ୍ତଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 352 ବର୍ଗ ସେ.ମି ହୁଏ; ଦ୍ୱିତୀୟଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

22. ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $14\sqrt{3}$ ସେ.ମି. ହେଲେ, ବୃତ୍ତର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ କେତେ ?

23. ଗୋଟିଏ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ତଃବୃତ୍ତର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 154 ବ.ମି. ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜର ପରିସୀମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

24. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତକଳାର ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଅନ୍ୟ ଏକ ବୃତ୍ତକଳାର ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ତିନିଗୁଣ। ପ୍ରଥମଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 9 ବର୍ଗ ସେ.ମି. ହେଲେ ଦ୍ୱିତୀୟ ବୃତ୍ତକଳାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ କେତେ ?

25. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତକଳା ଆକାର ବିଶିଷ୍ଟ କୌଣସି କ୍ଷେତ୍ରର ଚାରିପାଖରେ ବାଡ଼ ଦେବା ପାଇଁ ମିଟରକୁ ଟ.1.50 ହିସାବରେ ଟ.75 ଖର୍ଚ୍ଚ ହେଲା। ବୃତ୍ତକଳାର ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ 90^0 ହେଲେ ତାହାର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ କେତେ ?

26. 7 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ତିନୋଟି ବୃତ୍ତ ପରସ୍ପରକୁ ସ୍ପର୍ଶ କରନ୍ତି। ବୃତ୍ତମାନଙ୍କର ବହିଃସ୍ଥ ମାତ୍ର ସେମାନଙ୍କଦ୍ୱାରା ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଦଶମିକ ଦୁଇସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଆସନ୍ନମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

$(\sqrt{3} \simeq 1.73)$, $(\pi \simeq 3.14)$

27. ଅନ୍ତଃବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 12 ସେ.ମି. ଓ ବହିଃବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 13 ସେ.ମି. ହୋଇଥିବା ଏକ ବଳୟର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସହ ସମାନ ହେଲେ ବୃତ୍ତଟିର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

28. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଅଙ୍କିତ ଏକ ବୃତ୍ତକଳାର ଚାପ $\overparen{AXB}$ ର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ 60^0। ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ ଏବଂ $\overparen{AXB}$ କୁ ସ୍ପର୍ଶ କରୁଥିବା ବୃତ୍ତର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 9π ବର୍ଗ ଏକକ ହେଲେ,

(i) ପ୍ରଥମ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

(ii) OAXB ବୃତ୍ତକଳା ଓ ଏହା ମଧ୍ୟରେ ଅଙ୍କିତ ବୃତ୍ତର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଅନୁପାତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

29. 8 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତରେ

(i) 8 ସେ.ମି. ପରିମିତ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଛେଦିତ କ୍ଷୁଦ୍ରତର ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ii) $8\sqrt{2}$ ସେ.ମି. ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଛେଦିତ କ୍ଷୁଦ୍ରତର ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

$(\sqrt{3} \simeq 1.732)(\pi \simeq 3.141)$

30. 20 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବୃତ୍ତରେ କେନ୍ଦ୍ରରେ 60^0 କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରୁଥିବା ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । $(\sqrt{3} \simeq 1.732)(\pi \simeq 3.141)$

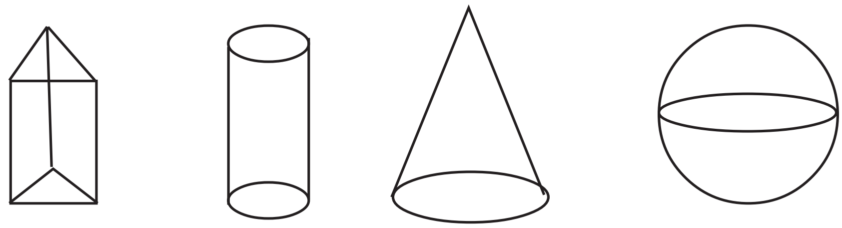
31. 10 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବୃତ୍ତରେ କେନ୍ଦ୍ରରେ 120^0 କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରୁଥିବା ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । $(\pi \simeq 3.141)$ $(\sqrt{3} \simeq 1.732)$

5.4. ସୁଷମ ଘନ ପଦାର୍ଥର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ (Surface area of regular solids) :

ଘନ ପଦାର୍ଥ (Solid) :

ପ୍ରତିଦିନ ତୁମେ ବହି, ଇଟା, ପଥରଖଣ୍ଡ, ପେଣ୍ଡୁ, ଲୁହାନଳୀ, ରୋଲ୍‌ବାଡ଼ି ଓ ବାକ୍ସ ଇତ୍ୟାଦି ପଦାର୍ଥମାନଙ୍କ ସଂସ୍ପର୍ଶରେ ଆସୁଅଛ। ଯେଉଁ ପଦାର୍ଥ ସମତଳ ଭୂମି ପୃଷ୍ଠରେ ଥୋଇଲେ ପଦାର୍ଥଟିର କିଛି ଅଂଶ ଭୂମିକୁ ଲାଗିରହେ ଏବଂ ଅନ୍ୟ ଭାଗଟି ଶୂନ୍ୟ, ବାୟୁ ବା ଜଳ ମଧ୍ୟରେ ସ୍ଥାନ ଅଧିକାର କରି ରହେ ସେ ପ୍ରକାର ପଦାର୍ଥକୁ ଘନ ପଦାର୍ଥ (solid) କୁହାଯାଏ। ଏଗୁଡ଼ିକ ତିନି ଦିଗରେ ବିସ୍ତୃତ ହୋଇଥାଏ। ଯଥା : ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବା ଲମ୍ବା ଦିଗରେ (lengthwise), ପ୍ରସ୍ଥ ବା ଓସାର ଦିଗରେ (Breadthwise), ବେଧ ବା ଉଚ୍ଚତା ଦିଗରେ (Thicknesswise) ବା (Heightwise)। ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ପ୍ରସ୍ଥ, ଉଚ୍ଚତାକୁ ମାତ୍ରା (Dimension) କୁହାଯାଏ। ତେଣୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଘନ ପଦାର୍ଥ ତ୍ରି-ମାତ୍ରିକ (Three dimensional) ଅଟେ।

ସମସ୍ତ ଘନ ପଦାର୍ଥକୁ ଦୁଇ ଶ୍ରେଣୀରେ ବିଭକ୍ତ କରାଯାଏ। ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଆକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ଘନ ପଦାର୍ଥକୁ ସୁଷମ ଘନ ପଦାର୍ଥ (Regular solid) ଏବଂ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଆକାର ନଥିବା ଘନ ପଦାର୍ଥକୁ ବିଷମଘନ ପଦାର୍ଥ (Irregular solid) କୁହାଯାଏ। ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ତୁମେ ପ୍ରିଜିମ୍, ସିଲିଣ୍ଡର, କୋନ୍ ଓ ଗୋଲକ ପରି କେତେକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଆକୃତିବିଶିଷ୍ଟ ଘନ ପଦାର୍ଥ ସଂପର୍କରେ ଅବଗତ ହେବ ।



[ଚିତ୍ର 5.15]

ତଳ ବା ପୃଷ୍ଠ (Surface) :

ଗଣିତ ଶାସ୍ତ୍ରରେ ତଳ (Surface) ଏକ ସଂଜ୍ଞା ବିହୀନ ପଦ। ଘନ ପଦାର୍ଥର ଉପରିଭାଗକୁ ସ୍ପର୍ଶକରି ତଳ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଧାରଣା କରିହୁଏ। ତଳ ବା ପୃଷ୍ଠଦ୍ୱାରା ଘନ ପଦାର୍ଥଟିର ଆକୃତି ଜଣାଯାଇଥାଏ। ତଳ ଦୁଇ ପ୍ରକାରର ଯଥା : ସମତଳ (plane surface) ଓ ବକ୍ରତଳ (curved surface)। ଇଟା, ବାକ୍ସ ଇତ୍ୟାଦି ଘନ ପଦାର୍ଥଗୁଡ଼ିକରେ କେବଳ ସମତଳପୃଷ୍ଠ, ରାସ୍ତା ତିଆରି ରୋଲର୍, ଫୁଙ୍କନଳ ଇତ୍ୟାଦିରେ ଉଭୟ ସମତଳ ଓ ବକ୍ରତଳପୃଷ୍ଠ ଏବଂ ଫୁଟବଲ୍‌ରେ କେବଳ ବକ୍ରତଳପୃଷ୍ଠ ଥାଏ।

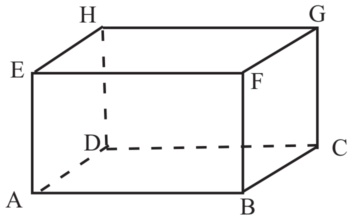
ଯେଉଁ ତଳରେ ଚିହ୍ନିତ ଦୁଇଗୋଟି ବିନ୍ଦୁର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁ ସେହି ତଳ ଉପରେ ଅବସ୍ଥାନ କରନ୍ତି ସେହି ତଳକୁ ସମତଳ କୁହାଯାଏ। ପୁନଶ୍ଚ ବହି, କାଗଜ ଓ ବାକ୍ସର ପୃଷ୍ଠ ଟେବୁଲ୍ ଉପରେ ରଖି ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ କିପରି ସମତଳ ପୃଷ୍ଠକୁ ସମତଳ ଉପରେ ରଖିଲେ ଉଭୟ ସମତଳ ପୃଷ୍ଠର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁ ମିଶି ଯାଉଛନ୍ତି। ମାତ୍ର ବଲ୍‌ଟିଏ ନେଇ ଟେବୁଲ୍ ଉପରେ ରଖିଲେ ବଲ୍‌ର ଏକମାତ୍ର ବିନ୍ଦୁ ଟେବୁଲ୍‌କୁ ସ୍ପର୍ଶ କରୁଛି ଏବଂ

ଚକ୍‌ଖଡ଼ି ଖଣ୍ଡଟିଏ ଟେବୁଲ୍ ଉପରେ ରଖିଲେ ଏହା ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖାରେ ଟେବୁଲ୍ ପୃଷ୍ଠକୁ ସ୍ପର୍ଶ କରୁଛି। ତେଣୁ ବଲ୍‌ର ପୃଷ୍ଠତଳ ଏବଂ ଚକ୍‌ର ପୃଷ୍ଠତଳ ବକ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳ ଅଟେ। କିନ୍ତୁ ଚକ୍‌ଖଣ୍ଡର ଦୁଇମୁଣ୍ଡ ଟେବୁଲ୍ ଉପରେ ରଖିଲେ ଏହାର ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଟେବୁଲ୍‌ର ତଳକୁ ସ୍ପର୍ଶ କରୁଛି। ତେଣୁ ଚକ୍‌ଖଣ୍ଡର ଦୁଇମୁଣ୍ଡ ସମତଳ ଅଟେ।

ସୀମାବଦ୍ଧ ତଳକୁ କ୍ଷେତ୍ର (Region) ଏବଂ କ୍ଷେତ୍ରର ମାପକୁ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ (Area)କୁହାଯାଏ। ଘନ ପଦାର୍ଥର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପାଇଁ ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ପ୍ରସ୍ଥ ଓ ଉଚ୍ଚତା ମଧ୍ୟରୁ ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟିର ମାପ ଆବଶ୍ୟକ। ଯେହେତୁ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଦ୍ୱି-ମାତ୍ରିକ (Two dimensional) ରାଶି ଅଟେ।

ସମତଳ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତେକ ତଥ୍ୟ :

(a) ଦୁଇଟି ସମତଳର କୌଣସି ଛେଦ ବିନ୍ଦୁ ନ ଥିଲେ, ସେମାନଙ୍କୁ ସମାନ୍ତର ସମତଳ କୁହାଯାଏ ।
ଚିତ୍ର 5.16 ରେ ABCD ଓ EFGH ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ସମତଳ ।



[ଚିତ୍ର 5.16]

(b) ଦୁଇଟି ସମତଳ ପରସ୍ପରକୁ ଏକ ସରଳ ରେଖାରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । (ଚିତ୍ର 5.16 ରେ ABCD ଓ BCGF ତଳ ଦ୍ୱୟ $\overleftrightarrow{BC}$ ରେଖାରେ ଛେଦ କରନ୍ତି)

(c) କୌଣସି ସମତଳ E ର ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ମଧ୍ୟ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ରେଖା (l) (ରଶ୍ମି ବା ରେଖାଖଣ୍ଡ) P ମଧ୍ୟ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ସମତଳ E ଉପରିସ୍ଥ ଅନ୍ୟାନ୍ୟ ସମସ୍ତ ରେଖା ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହେଲେ, ସେହି ରେଖା (l)କୁ ସମତଳ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ କୁହାଯାଏ ।

(d) ଚିତ୍ର 5.16 ରେ FB ରେଖା ABCD ସମତଳ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ।

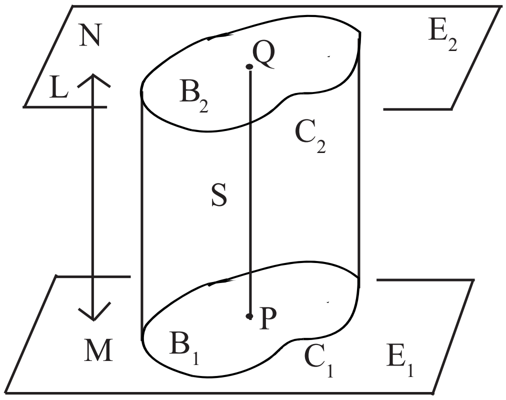
5.4.1 କେତେକ ଘନ ପଦାର୍ଥର ସୃଷ୍ଟିର ସଂଜ୍ଞା :

ପ୍ରିଜିମ୍ ଓ ସିଲିଣ୍ଡର ଏକ ବିଶେଷ ପ୍ରକାର ଘନ ପଦାର୍ଥ । ଏଗୁଡ଼ିକର ଗଠନର ସଂଜ୍ଞା ସମ୍ବନ୍ଧରେ ସମ୍ୟକ ଧାରଣା ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

ଚିତ୍ର 5.17 ରେ E_1 ଏବଂ E_2 ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ସମତଳ । L ସରଳରେଖା E_1 କୁ କେବଳ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଛି । C_1, E_1 ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ସରଳ ଆବଦ୍ଧବକ୍ର (Simple Closed Curve) (ବକ୍ରରେଖା ନିଜକୁ ଛେଦ କରୁ ନଥିଲେ ତାହାକୁ ସରଳବକ୍ର କୁହାଯାଏ । ବକ୍ରଟିର ଆଦ୍ୟ ଓ ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟ ଏକ ଓ ଅଭିନ୍ନ ହେଲେ ଚକ୍ରଟିକୁ ଆବଦ୍ଧବକ୍ର କୁହାଯାଏ । ବୃତ୍ତ ଏକ ସରଳ ଆବଦ୍ଧବକ୍ରର ଉଦାହରଣ ।) P, C_1 ଦ୍ୱାରା ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ର B_1 (C_1 ଏବଂ ଏହାର ଅନ୍ତର୍ଦେଶର ସଂଯୋଗ) ଉପରିସ୍ଥ ଯେ କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଉ । P ମଧ୍ୟଦେଇ L ସହିତ ସମାନ୍ତର ରେଖା E_2 କୁ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କଲେ ଆମେ $\overline{PQ}$ ରେଖାଖଣ୍ଡ ପାଇବା । ଏହିପରି B_1 ଉପରିସ୍ଥ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ପାଇଁ ମିଳୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡ ଗୁଡ଼ିକର ସେଟ୍ S କୁ ଏକ **ସିଲିଣ୍ଡର** କୁହାଯାଏ ।

ସିଲିଣ୍ଡର S ଓ ସମତଳ E_2 ର ଛେଦାଂଶ C_2 ବକ୍ର ଦ୍ୱାରା ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ର B_2 ହେବ । ଉଚ୍ଚତର ଗଣିତ ସାହାଯ୍ୟରେ ଏହା ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇ ପାରେ ଯେ C_1 ଓ C_2 ବକ୍ରଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ (Congruant) ହେବେ ଏବଂ B_1 ଓ B_2 ଉଭୟର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସମାନ ହେବ । ଅର୍ଥାତ୍ C_1, ଏକ ବୃତ୍ତ କିମ୍ବା ତ୍ରିଭୁଜ ହେଲେ B_1 ଏକ ବୃତ୍ତାକାର କ୍ଷେତ୍ର କିମ୍ବା ତ୍ରିଭୁଜାକାର କ୍ଷେତ୍ର ହେବ ଏବଂ C_2 ମଧ୍ୟ ଅନୁରୂପ ବୃତ୍ତ ବା ତ୍ରିଭୁଜ ହେବ ଏବଂ B_2 ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତାକାରକ୍ଷେତ୍ର ବା ତ୍ରିଭୁଜାକାର କ୍ଷେତ୍ର ହେବ ।

B_1 (କିମ୍ବା B_2) ସେଟ୍‌କୁ ସିଲିଣ୍ଡରର S ର **ଭୂମି ବା ଆଧାର** (Base) କୁହାଯାଏ । M ବିନ୍ଦୁ C_1 ଉପରିସ୍ଥ ଏବଂ N ବିନ୍ଦୁ C_2 ଉପରିସ୍ଥ । $\overline{MN}$, L ସହିତ ସମାନ୍ତର ହେଲେ $\overline{MN}$ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ସିଲିଣ୍ଡରର ଏକ **ଜେନେରେଟର (Generator) ବା ଜନକରେଖା** କୁହାଯାଏ । C_1 କୁ ସିଲିଣ୍ଡରର **ଡାଇରେକ୍‌ଟ୍ରିକ୍‌ସ (Directrix)** ବା **ନିୟାମକ ରେଖା କୁହାଯାଏ** । C_1 ମଧ୍ୟଦେଇ ଅଙ୍କିତ ସମସ୍ତ ଜେନେରେଟର ଗୁଡ଼ିକର ସଂଯୋଗରେ ସିଲିଣ୍ଡରର **ବକ୍ରପୃଷ୍ଠତଳ** ବା **ପାର୍ଶ୍ୱପୃଷ୍ଠତଳ (Curved surface or Lateral surface)** ଗଠିତ ହୁଏ । ବକ୍ରପୃଷ୍ଠତଳ ଓ ଦୁଇ ଆଧାରର ସଂଯୋଗରେ ସିଲିଣ୍ଡରର **ସମଗ୍ରପୃଷ୍ଠତଳ (Total curved surface)** ଗଠିତ ହୁଏ । ଚିତ୍ର 5.16 ରେ ABCD ଓ EFGH ଆୟତାଘନାକାର ସିଲିଣ୍ଡରର ଦୁଇ ଆଧାର । ABFE, BCGF, CDHG ଏବଂ DAEH ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରଗୁଡ଼ିକର ସଂଯୋଗ ହେଉଛି ଉକ୍ତ ସିଲିଣ୍ଡରର ପାର୍ଶ୍ୱପୃଷ୍ଠତଳ । (ପ୍ରଶ୍ନ : ଏଠାରେ C_1 କାହାକୁ କହିବା ?)



[ଚିତ୍ର 5.17]

ଚିତ୍ର 5.17ରେ (i) **B_1 ଯେକୌଣସି ବହୁଭୁଜାକାର କ୍ଷେତ୍ର ହେଲେ S କୁ ପ୍ରିଜିମ୍ (Prism)** କୁହାଯାଏ ଏବଂ L ରେଖା E_1 ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହେଲେ S କୁ ଏକ **ସରଳ ପ୍ରିଜିମ୍ (Right Prism)** କୁହାଯାଏ ।

(ii) **B_1 ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ର ହେଲେ S ଏକ ସମାନ୍ତର ଘନ (Parallelopiped) ହେବ । ଆୟତଘନ (Cuboid)** ଏବଂ **ସମଘନ (Cube)** ଉଭୟେ ଏକ ବିଶେଷ ପ୍ରକାରର ସମାନ୍ତର ଘନ । ଏହି ପରିସ୍ଥିତିରେ L ରେଖା E_1 ପ୍ରତି ଲମ୍ବ, ଅଧିକନ୍ତୁ ସମଘନ ପରିସ୍ଥିତିରେ PQ ସହ B_1 ର ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ।

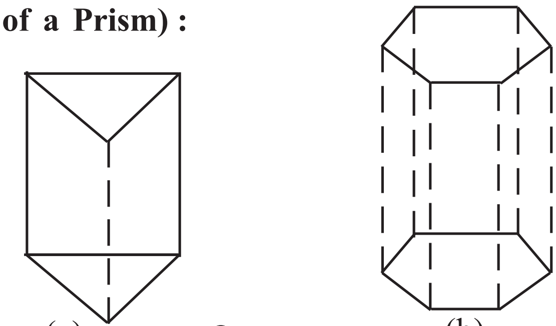
(iii) B_1 ଏକ ବୃତ୍ତାକାର କ୍ଷେତ୍ର ହେଲେ S ଏକ ବୃତ୍ତଭୂମିକ ସିଲିଣ୍ଡର (circular cylinder) ଏବଂ L ରେଖା E_1 ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହେଲେ S ଏକ ସରଳ ବୃତ୍ତ ଭୂମିକ ସିଲିଣ୍ଡର (Right circular cylinder) ହେବ । ପ୍ରିଜିମ୍, ଆୟତ ଘନ, ସମଘନ, ସିଲିଣ୍ଡର ଏହି ଘନପଦାର୍ଥ ଗୁଡ଼ିକର ଗଠନ ଓ ପରିସ୍ଥିତିର ସାଦୃଶ୍ୟ ଯୋଗୁଁ ଏମାନେ ଏକ ପରିବାର ଭୁକ୍ତ ଅଟନ୍ତି । ତେଣୁ ଏମାନଙ୍କର ପାର୍ଶ୍ୱପୃଷ୍ଠତଳ (ବକ୍ରପୃଷ୍ଠତଳ), ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳ ଓ ଆୟତନ ନିର୍ଣ୍ଣୟର ସୂତ୍ରାବଳୀ ଏକାପରି । ସରଳ ସିଲିଣ୍ଡର ନିମନ୍ତେ ନିମ୍ନ ସୂତ୍ରାବଳୀ ପ୍ରୟୋଗ କରାଯାଏ –

(a) ପାର୍ଶ୍ୱ ପୃଷ୍ଠତଳ (ବକ୍ର ତଳ)ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ଆଧାରର ପରିସୀମା × ଉଚ୍ଚତା
(b) ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ପାର୍ଶ୍ୱପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ + 2 × ଆଧାରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ
(c) ଆୟତନ = ଆଧାରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ × ଉଚ୍ଚତା

5.5 ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ (Surface Area of a Prism) :

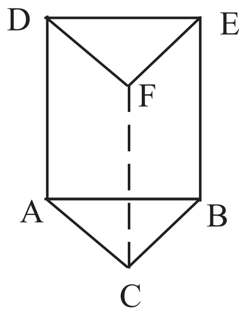
ପ୍ରିଜିମ୍ ଗୋଟିଏ ସମତଳ ପରିବେଷ୍ଟିତ ଏକ ଘନପଦାର୍ଥ। ଏହାର ପ୍ରାନ୍ତସମତଳ ଦ୍ୱୟ ସମାନ୍ତର ଓ ସର୍ବସମ ସରଳରୈଖିକ କ୍ଷେତ୍ର।

ଏହାର ପ୍ରାନ୍ତ ସମତଳଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରୁ ଯେଉଁ ଗୋଟିକ ଉପରେ ପ୍ରିଜିମ୍‌ଟି ଦଣ୍ଡାୟମାନ ହୁଏ ତାହାକୁ ଭୂମି


(a) [ଚିତ୍ର 5.18] (b)

ବା ଆଧାର (Base) କୁହାଯାଏ। ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଭୂମି ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜ, ଚତୁର୍ଭୁଜ, ଷଡ଼ଭୁଜ, ଦଶଭୁଜାକାର ଇତ୍ୟାଦି ଯେକୌଣସି ସରଳରୈଖିକ କ୍ଷେତ୍ର ହୋଇଥାଏ। ଭୂମିର ବିପରୀତ ସମତଳଟିକୁ ଶୀର୍ଷ ସମତଳ କୁହାଯାଏ। ଭୂମିର ଆକାର ଅନୁସାରେ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ନାମକରଣ କରାଯାଏ। ଯଥା- ତ୍ରିଭୁଜାକାର ପ୍ରିଜିମ୍, ଚତୁର୍ଭୁଜାକାର ପ୍ରିଜିମ୍, ଷଡ଼ଭୁଜାକାର ପ୍ରିଜିମ୍ ଇତ୍ୟାଦି। ପ୍ରାନ୍ତୀୟ ତଳଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଲମ୍ବୀୟ ଦୂରତା (Perpendicular distance) କୁ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଉଚ୍ଚତା (height or altitude) କୁହାଯାଏ।

ଭୂମି ଓ ଶୀର୍ଷତଳ ବ୍ୟତୀତ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଅନ୍ୟ ସମତଳମାନଙ୍କୁ ପାର୍ଶ୍ୱ ପୃଷ୍ଠତଳ କିମ୍ବା ପାର୍ଶ୍ୱତଳ (lateral surface) କୁହାଯାଏ। ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ପାର୍ଶ୍ୱତଳମାନଙ୍କର ସଂଖ୍ୟା ଭୂମିର ବାହୁମାନଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା ସହ ସମାନ। ଅର୍ଥାତ୍ ତ୍ରିଭୁଜାକାର ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ତିନିଗୋଟି, ଚତୁର୍ଭୁଜାକାର ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଚାରିଗୋଟି, ଷଡ଼ଭୁଜାକାର ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଛଅଗୋଟି ପାର୍ଶ୍ୱତଳ ଥାଏ, ପାର୍ଶ୍ୱତଳଗୁଡ଼ିକ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର ବା ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ର ହୋଇଥାନ୍ତି। ଯେଉଁ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ପାର୍ଶ୍ୱତଳଗୁଡ଼ିକ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର ଅର୍ଥାତ୍ ପାର୍ଶ୍ୱତଳଗୁଡ଼ିକର ବାହୁ, ଭୂମି ଏବଂ ଶୀର୍ଷତଳ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ତାହାକୁ ସରଳ ପ୍ରିଜିମ୍ (Right Prism) କୁହାଯାଏ। ଯେଉଁ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ପାର୍ଶ୍ୱତଳ ଗୁଡ଼ିକ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ର ଅର୍ଥାତ୍ ପାର୍ଶ୍ୱତଳର ବାହୁଗୁଡ଼ିକ ପ୍ରାନ୍ତ ସମତଳ ଉପରେ ତୀର୍ଯ୍ୟକ୍ ଭାବେ ଦଣ୍ଡାୟମାନ ସେ ପ୍ରକାର ପ୍ରିଜିମ୍‌କୁ **ତୀର୍ଯ୍ୟକ୍ ପ୍ରିଜିମ୍** କୁହାଯାଏ। ସରଳ ପ୍ରିଜିମ୍ ତୁମର ପାଠ୍ୟ ଅନ୍ତର୍ଗତ ହୋଇଥିବାରୁ ଏତଦ୍ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ପ୍ରଶ୍ନର ସମାଧାନ ନିମ୍ନରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି।



[ଚିତ୍ର 5.19]

ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଚିତ୍ର-5.19କୁ ଲକ୍ଷ୍ୟକର। ଏହା ଏକ ତ୍ରିଭୁଜାକାର ଆଧାର ବିଶିଷ୍ଟ ସରଳ ପ୍ରିଜିମ୍। ଯାହାର ଭୂମି ଓ ଶୀର୍ଷତଳଦ୍ୱୟ ତ୍ରିଭୁଜାକାର କ୍ଷେତ୍ର ଓ ପାର୍ଶ୍ୱତଳ ତ୍ରୟ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର। ବର୍ତ୍ତମାନ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଭୂମି ଓ ପାର୍ଶ୍ୱତଳଗୁଡ଼ିକର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯିବ।

ମନେକର ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଉଚ୍ଚତା $AD = BE = CF = h$ ଏକକ।

ଭୂମି ΔABCର ବାହୁତ୍ରୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $BC = a$ ଏକକ, $AC = b$ ଏକକ ଏବଂ $AB = c$ ଏକକ

BCFE ପାର୍ଶ୍ୱତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $BC \cdot CF = ah$ ବର୍ଗ ଏକକ

ACFD ପାର୍ଶ୍ୱତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $AC \cdot AD = bh$ ବର୍ଗ ଏକକ

ABED ପାର୍ଶ୍ୱତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $AB \cdot BE = ch$ ବର୍ଗ ଏକକ

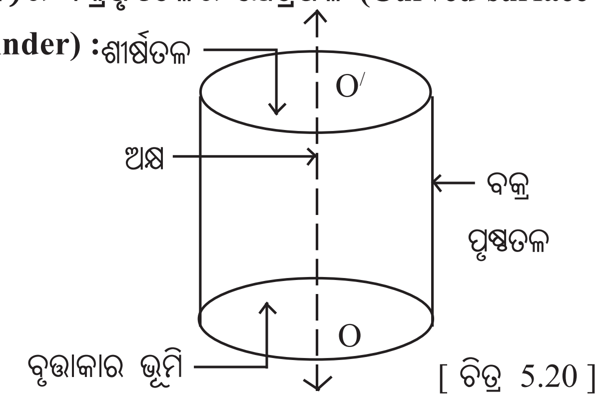
$\therefore$ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ପାର୍ଶ୍ୱ ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସମଷ୍ଟି = $(ah + bh + ch) = (a+b+c)h$ ବର୍ଗ ଏକକ।

$\therefore$ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ପାର୍ଶ୍ୱ ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ଆଧାରର ପରିସୀମା × ଉଚ୍ଚତା

ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = (BCFE ପାର୍ଶ୍ୱତଳ + ACFD ପାର୍ଶ୍ୱତଳ + ABED ପାର୍ଶ୍ୱତଳ)ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ + 2 × ΔABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$\therefore$ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ପାର୍ଶ୍ୱ ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ + 2 ଆଧାରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ।

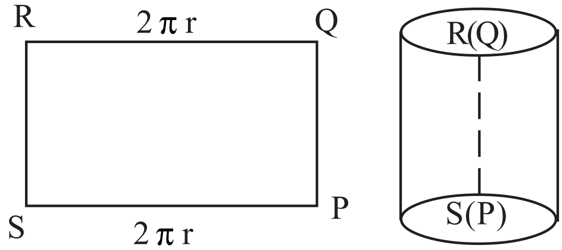
5.6. ବୃତ୍ତଭୂମିକ ନିଦା ସରଳ ସିଲିଣ୍ଡର (ସମବର୍ତ୍ତୁଳ)ର ବକ୍ରପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ (Curved surface area of a right circular solid cylinder) :



[ଚିତ୍ର 5.20]

ରୁଲ୍‌ବାଡ଼ି, କଟା ହୋଇ ନଥିବା ପେନ୍‌ସିଲ୍ ଇତ୍ୟାଦି ଘନ ପଦାର୍ଥଗୁଡ଼ିକ ବୃତ୍ତଭୂମିକ ସରଳ ସିଲିଣ୍ଡର ଆକୃତିର ଅଟନ୍ତି। ଏଗୁଡ଼ିକ ପରୀକ୍ଷା କଲେ ଦେଖିବ ଯେ, ଏ ପ୍ରକାର ଘନ ପଦାର୍ଥର ତିନିଗୋଟି ତଳ ଅଛି। ତିନିଗୋଟି ତଳ ମଧ୍ୟରୁ ଦୁଇଗୋଟି ସମତଳ (plane surface) ଏବଂ ଅନ୍ୟଟି ବକ୍ରତଳ (curved surface), ଏହି ସମତଳ ପୃଷ୍ଠଦ୍ୱୟ ବୃତ୍ତାକାର କ୍ଷେତ୍ର ଓ ଏମାନେ ସମାନ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଏବଂ ପରସ୍ପର ସମାନ୍ତର। ଏହି ତଳଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରୁ ଯାହା ଉପରେ ସିଲିଣ୍ଡରଟି ଦଣ୍ଡାୟମାନ ତାକୁ ଭୂମି (Base) ଏବଂ ଅନ୍ୟଟିକୁ ଶୀର୍ଷତଳ କୁହାଯାଏ। ଦୁଇ ବୃତ୍ତାକାର ତଳର କେନ୍ଦ୍ରଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ ସରଳରେଖାକୁ ସିଲିଣ୍ଡରର ଅକ୍ଷ (Axis) କୁହାଯାଏ। କେନ୍ଦ୍ରଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା $OO^{/}$କୁ ସିଲିଣ୍ଡରର ଉଚ୍ଚତା (Height) କୁହାଯାଏ। ଅକ୍ଷ, ଉଭୟ ବୃତ୍ତଭୂମିକ ତଳ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଅଟନ୍ତି। ତେଣୁ ଏ ପ୍ରକାର ସିଲିଣ୍ଡରଗୁଡ଼ିକୁ **ସରଳ ବୃତ୍ତଭୂମିକ ସିଲିଣ୍ଡର (Right circular cylinder)** କୁହାଯାଏ।

ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ PQRS ଏକ ମୋଟା ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରାକୃତି କାଗଜ। ଏହାକୁ ଗୁଡ଼େଇ PQ ଓ SR ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ଯୋଗ କଲେ ଏହା ଦ୍ୱିତୀୟ ଚିତ୍ରପରି ଏକ ସିଲିଣ୍ଡର ସୃଷ୍ଟି କରିବ।



[ଚିତ୍ର 5.21]

$\therefore$ ସିଲିଣ୍ଡରର ବକ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

= PQRS ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = PS × PQ= ସିଲିଣ୍ଡରର ଆଧାରର ପରିଧି × ସିଲିଣ୍ଡରର ଉଚ୍ଚତା

ସିଲିଣ୍ଡର ଭୂମିର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r ଏକକ, ଉଚ୍ଚତା h ଏକକ ହେଲେ

ସିଲିଣ୍ଡରର ବକ୍ରପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $2\pi rh$ ବର୍ଗ ଏକକ

ନିଦା ସିଲିଣ୍ଡରର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

= ବକ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ + 2 ଆଧାରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r\,(h + r)$

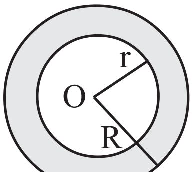
$\therefore$

ସିଲିଣ୍ଡରର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $2\pi r\,(h + r)$ ବର୍ଗ ଏକକ।

5.7. ବୃତ୍ତୀୟ ବଳୟଭୂମିକ ଫମ୍ପା ସରଳ ସିଲିଣ୍ଡରର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ (Surface area of a right annular circular cylinder.)

ରବରନଳୀ, ଲୁହା ପାଇପ୍ ଇତ୍ୟାଦି ମଝି ଫମ୍ପାଥିବା ଘନ ପଦାର୍ଥ ଏହି ଶ୍ରେଣୀର ଅଟନ୍ତି। ଏଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରସ୍ଥଚ୍ଛେଦ ବୃତ୍ତୀୟ ବଳୟ (Circular Annulus) ଅଟେ।

ଏଥିରେ ଦୁଇଟି ବକ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳ ଥାଏ। ଅନ୍ତଃ ବକ୍ର-ପୃଷ୍ଠତଳର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧକୁ ଅନ୍ତଃବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r ଏବଂ ବହିଃ ବକ୍ରତଳର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧକୁ ବହିଃ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ R ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ । ଫମ୍ପା ସିଲିଣ୍ଡରର କାନ୍ଥର ମୋଟେଇ t ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ। ଯେଉଁଠାରେ $t = (R - r)$ ଏକକ।



[ଚିତ୍ର 5.22]

ସିଲିଣ୍ଡରର ବ୍ୟାସ ତୁଳନାରେ ଉଚ୍ଚତା ଅତ୍ୟଧିକ ହୋଇଥିଲେ ଉଚ୍ଚତା ଶବ୍ଦ ପରିବର୍ତ୍ତେ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଶବ୍ଦ ବ୍ୟବହୃତ ହୋଇଥାଏ। ବିଶେଷତଃ ନଳଗୁଡ଼ିକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଏହା ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ।

ଘନ ପଦାର୍ଥର ପୃଷ୍ଠତଳ (ବକ୍ରତଳର) ସାଧାରଣ ସୂତ୍ରଟି ହେଲା,

ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ବକ୍ରତଳର ପରିସୀମା × ଉଚ୍ଚତା।

ଏହାର ଦୁଇଟି ବକ୍ରପୃଷ୍ଠତଳ ମଧ୍ୟରୁ

ବହିଃପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $2\pi Rh$ ଏବଂ ଅନ୍ତଃପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $2\pi rh$

$\therefore$ **ଫମ୍ପା ସିଲିଣ୍ଡରର ପାର୍ଶ୍ୱ ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $2\pi(R+r)h$ ବର୍ଗ ଏକକ।**

ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ପାର୍ଶ୍ୱ ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ + 2 × ଆଧାରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$\because$ ଆଧାରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\pi(R^2 - r^2)$

$\therefore$ ଫମ୍ପା ସିଲିଣ୍ଡରର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $2\pi(R+r)\,h + 2\pi(R^2 - r^2)$

$= 2\pi(R+r)h + 2\pi(R+r)(R-r) = 2\pi(R+r)(h+R-r) = 2\pi(R+r)(h+t)$

ଯେଉଁଠାରେ (ବେଧ) $(t) = R - r$

ଫମ୍ପା ସିଲିଣ୍ଡରର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $2\pi(R+r)(h+t)$ ବର୍ଗ ଏକକ।

ସମାହିତ ପ୍ରଶ୍ନାବଳୀ (ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ପୃଷ୍ଠତଳ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ) :

ଉଦାହରଣ-1: 15 ସେ.ମି. ଉଚ୍ଚତା ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ସରଳ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଭୂମି ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ। ଏହି ତ୍ରିଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣ ଓ ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 13 ସେ.ମି. ଓ 5 ସେ.ମି. ହେଲେ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ :

ସରଳ ପ୍ରିଜିମ୍‌ଟିର ଭୂମି ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ। ଏହି ତ୍ରିଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣ ଓ ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 13 ସେ.ମି ଓ 5 ସେ.ମି.

$\therefore$ ଭୂମିର ଅନ୍ୟ ବାହୁଟିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = $\sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$ ସେ.ମି.

ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଭୂମିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2} \times 12 \times 5 = 30$ ବର୍ଗ ସେ.ମି.

ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ପାର୍ଶ୍ୱ ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ଭୂମିର ପରିସୀମା × ଉଚ୍ଚତା

$= (5 + 12 + 13) \times 15 = 30 \times 15 = 450$ ବ.ସେ.ମି.

$\therefore$ ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ପାର୍ଶ୍ୱ ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ + $2 \times$ ଭୂମିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

= $(450 + 2 \times 30)$ ବ.ସେ.ମି. = 510 ବ.ସେ.ମି। (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ-2 : ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜାକାର ସରଳ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 1368 ବ.ସେ.ମି. ଏବଂ ଭୂମିର ବାହୁ ତ୍ରୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 10 ସେ.ମି., 17 ସେ.ମି. ଓ 21 ସେ.ମି. ହେଲେ ପ୍ରିଜିମ୍‌ଟିର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ :

ପ୍ରିଜିମ୍‌ଟିର ଭୂମିର ବାହୁତ୍ରୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 10 ସେ.ମି., 17 ସେ.ମି. ଓ 21 ସେ.ମି.।

$\therefore$ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଭୂମିର ପରିସୀମା = $2s = (10+17+21) = 48$ ସେ.ମି.

$\therefore$ ଭୂମିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{24(24-10)(24-17)(24-21)}$

$= \sqrt{24 \times 14 \times 7 \times 3} = 84$ ବ.ସେ.ମି.

ମନେକର ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଉଚ୍ଚତା = h ସେ.ମି.

$\therefore$ ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ପାର୍ଶ୍ୱ ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ + $2 \times$ ଭୂମିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

= ଭୂମିର ପରିସୀମା $\times$ ଉଚ୍ଚତା + $2 \times$ ଭୂମିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$= (48 \times h + 2 \times 84) = (48h + 168)$

କିନ୍ତୁ ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ, ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = 1368 ବ.ସେ.ମି.

$\Rightarrow 48h + 168 = 1368 \Rightarrow 48h = 1368 - 168 = 1200$

$\therefore h = \frac{1200}{48} = 25$ ସେ.ମି. $\Rightarrow$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଉଚ୍ଚତା = 25 ସେ.ମି. (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ-3 : 24 ମିଟର ଉଚ୍ଚତା ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ସରଳ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଭୂମି ଏକ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜାକାର କ୍ଷେତ୍ର। ଏହି ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ପାର୍ଶ୍ୱପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 864 ବ.ମି.। ଉକ୍ତ ବହୁଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 6 ମି. ହେଲେ ଏହି କ୍ଷେତ୍ରଟିର ବାହୁସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ : ମନେକର ସୁଷମ ବହୁଭୁଜ କ୍ଷେତ୍ରର ବାହୁସଂଖ୍ୟା n ଯାହାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 6 ମି.

$\Rightarrow$ ପରିସୀମା = ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $\times$ ବାହୁ ସଂଖ୍ୟା = 6n ମି.।

କିନ୍ତୁ ଆଧାରର ପରିସୀମା = $\frac{\text{ପାର୍ଶ୍ୱପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}}{\text{ଉଚ୍ଚତା}} = \frac{864}{24} = 36$ ମି.

$\Rightarrow 6n = 36 \Rightarrow n = 6 \Rightarrow$ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜର ବାହୁସଂଖ୍ୟା 6

$\therefore$ ଭୂମି ଗୋଟିଏ ସୁଷମ ଷଡ଼ଭୁଜ। (ଉତ୍ତର)

ସିଲିଣ୍ଡରର ପୃଷ୍ଠତଳ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ :

ଉଦାହରଣ-4 : ଏକ ନିଦା ସରଳ ବୃତ୍ତଭୂମିକ ସିଲିଣ୍ଡରର ଭୂମିର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 7 ଡେ.ମି. ଏବଂ ଉଚ୍ଚତା 25 ଡେ.ମି. ହେଲେ ଏହାର ବକ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳ, ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର। $(\pi \simeq \frac{22}{7})$

ସମାଧାନ : ସିଲିଣ୍ଡରର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ (r) = 7 ଡେ.ମି., ଉଚ୍ଚତା (h) = 25 ଡେ.ମି.

$\therefore$ ଏହାର ବକ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ଆଧାରର ପରିସୀମା × ଉଚ୍ଚତା = $2\pi rh$ ବ.ଡ଼େ.ମି.

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 25 = 1100$ ବ.ଡ଼େ.ମି.

ଭୂମିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\pi r^2 = \frac{22}{7} \times 7^2 = 154$ ବ.ଡ଼େ.ମି.

$\therefore$ ସିଲିଣ୍ଡରର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ବକ୍ରପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ + 2 × ଆଧାରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$= (1100 + 154 \times 2) = (1100 + 308) = 1408$ ବ.ଡ଼େ.ମି.।

$\therefore$ ସିଲିଣ୍ଡରର ବକ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ, ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଯଥାକ୍ରମେ 1100 ବ.ଡ଼େ.ମି., 1408 ବ.ଡେ.ମି. ଅଟେ। (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ-5 : ଗୋଟିଏ ଲୁହାନଳର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 84 ସେ.ମି.। ଏହାର ବେଧ 2 ସେ.ମି.। ଭୂମିର ବହିଃବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 8 ସେ.ମି ହେଲେ, ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର। $(\pi \simeq \frac{22}{7})$

ସମାଧାନ : ଲୁହାନଳର ଦୈର୍ଘ୍ୟ (h) = 84 ସେ.ମି., ଭୂମିର ବହିଃ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ (R) = 8 ସେ.ମି. ଏବଂ

ବେଧ (t) = 2 ସେ.ମି. $\Rightarrow$ ଅନ୍ତଃ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ (r) = 8 – 2 = 6 ସେ.ମି.

ଲୁହାନଳର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $2\pi(R+r)(h+t)$ ବ.ସେ.ମି.

$= 2 \times \frac{22}{7}(8 + 6)(84 + 2) = 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \times 86 = 7568$ ବ.ସେ.ମି. (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ-6 : ଗୋଟିଏ ଲୁହାନଳର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 100 ସେ.ମି. ଏବଂ ଲୁହାର ବେଧ 4 ସେ.ମି.। ଏହାର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 9152 ବ.ସେ.ମି. ହେଲେ ଭୂମିର ବହିଃ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଓ ଅନ୍ତଃବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର। $(\pi \simeq \frac{22}{7})$

ସମାଧାନ : ମନେକର ଲୁହାନଳର ଭୂମିର ବହିଃ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ = R ସେ.ମି. ଏବଂ ଅନ୍ତଃ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ = r ସେ.ମି.।

$\therefore$ ବେଧ (t) = (R–r) = 4 ସେ.ମି. ....(i)

ଉଚ୍ଚତା (h) = 100 ସେ.ମି. ଓ ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = 9152 ବ.ସେ.ମି.।

$\Rightarrow 2\pi(R + r)(h + t) = 9152 \Rightarrow 2 \times \frac{22}{7}(R+r)(100 + 4) = 9152$

$\Rightarrow R + r = \frac{9152 \times 7}{2 \times 22 \times 104} = 14$ ....(ii)

(i) ଓ (ii) ରୁ $2R = 18 \Rightarrow R = 9$ ସେ.ମି.

$\therefore$ r = 14 – 9 = 5 ସେ.ମି.।

$\therefore$ ବହିଃ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ = 9 ସେ.ମି. ଏବଂ ଅନ୍ତଃ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ = 5 ସେ.ମି (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5(c)

(ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ପୃଷ୍ଠତଳ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ)

1. ଏକ ସରଳ ତ୍ରିଭୁଜାକାର ଭୂମିବିଶିଷ୍ଟ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଭୂମିର ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ a, b, c, ଉଚ୍ଚତା h, ପାର୍ଶ୍ୱ ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ L, ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ W ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହେଲେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କର ସମାଧାନ କର।
   (a) a = 10 ସେ.ମି., b = 6 ସେ.ମି., c = 8 ସେ.ମି., h = 20 ସେ.ମି. ହେଲେ, L ଓ W ସ୍ଥିର କର।
   (b) a = 5 ମି., b = 5 ମି., c = 6 ମି., h = 8 ମି.ହେଲେ, L ଓ W ସ୍ଥିର କର।
   (c) a = b = 15 ମି., c = 24 ମି., h = 18 ମି. ହେଲେ, L ଓ W ସ୍ଥିର କର।
2. ଗୋଟିଏ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଉଚ୍ଚତା h, ପାର୍ଶ୍ୱ ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ L ଏବଂ ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ W ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହେଲେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ସମାଧାନ କର।
   (a) ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଭୂମି ଏକ ସମକୋଣୀ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ଯାହାର କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 40 ମି., h = 50 ମି., L ଓ W କେତେ ? ($\sqrt{2} \simeq 1.414$)
   (b) ସୁଷମ ଷଡ଼ଭୁଜାକାର ଆଧାର ବିଶିଷ୍ଟ ଭୂମିର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 6 ଡେ.ମି., h = 20 ଡେ.ମି. ହେଲେ, L ଓ W କେତେ ? ($\sqrt{3} \simeq 1.732$)
   (c) ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଭୂମି ଏକ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଯାହାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 16 ସେ.ମି., h = 25 ସେ.ମି. ହେଲେ, L ଓ W କେତେ ? ($\sqrt{3} \simeq 1.732$)
3. ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜାକାର ଭୂମି ବିଶିଷ୍ଟ ସରଳ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଭୂମିର ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 13 ସେ.ମି., 14 ସେ.ମି. ଓ 15 ସେ.ମି.। ଏହାର ପାର୍ଶ୍ୱ ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 840 ବର୍ଗ ସେ.ମି. ହେଲେ ପ୍ରିଜିମ୍‌ଟିର ଉଚ୍ଚତା ଓ ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।
4. ଗୋଟିଏ ଖୁଣ୍ଟ ଏକ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜାକାର ଭୂମି ବିଶିଷ୍ଟ ସରଳ ପ୍ରିଜିମ୍। ଏହାର ପାର୍ଶ୍ୱତଳଗୁଡ଼ିକୁ କାଗଜ ମଡ଼ାଇବା ପାଇଁ ପ୍ରତି ବର୍ଗ ସେ.ମି.କୁ 15 ପଇସା ହିସାବରେ ଟ.18.90 ଖର୍ଚ୍ଚ ହେଲା। ଖୁଣ୍ଟଟିର ଉଚ୍ଚତା $8\sqrt{3}$ ସେ.ମି. ହେଲେ ଭୂମିର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କେତେ ? ($\sqrt{3} \simeq 1\frac{3}{4}$)
5. 18 ମିଟର ଉଚ୍ଚତା ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜାକାର ଭୂମିବିଶିଷ୍ଟ ସରଳ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଭୂମିର ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 12 ମି., 16 ମି. ଓ 20 ମି. ହେଲେ, ପ୍ରିଜିମ୍‌ଟିର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।
6. ଗୋଟିଏ ସରଳ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ପାର୍ଶ୍ୱ ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 2100 ବ.ସେ.ମି ଓ ଉଚ୍ଚତା 30 ସେ.ମି.। ଏହାର ଆଧାର ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ଯାହାର ବୃହତ୍ତମ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 29 ସେ.ମି.। ଆଧାରର ଅନ୍ୟ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।
7. ଗୋଟିଏ ସରଳ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଭୂମି ଏକ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଯାହାର ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 24 ସେ.ମି. ଏବଂ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମାନ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 13 ସେ.ମି. । ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଉଚ୍ଚତା 20 ସେ.ମି. ହେଲେ, ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।
8. ଗୋଟିଏ ସରଳ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଭୂମି ଏକ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ । ଯାହାର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 50 ସେ.ମି., ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଉଚ୍ଚତା 1.2 ମି. ହେଲେ, ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର। ($\sqrt{3} \simeq 1.732$)

9. ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜାକାର ଭୂମି ବିଶିଷ୍ଟ ସରଳ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଭୂମିର ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 13 ସେ.ମି., 14 ସେ.ମି. ଓ 15 ସେ.ମି. । ଏହାର ପାର୍ଶ୍ୱପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 1050 ବ.ସେ.ମି. ହେଲେ, ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଉଚ୍ଚତା ଓ ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

10. ଗୋଟିଏ କାଠବାଡ଼ି ଏକ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜାକାର ଭୂମି ବିଶିଷ୍ଟ ସରଳ ପ୍ରିଜିମ୍ । ଏହାର ପାର୍ଶ୍ୱତଳଗୁଡ଼ିକୁ କାଗଜ ମଡ଼ାଇବା ପାଇଁ ପ୍ରତି ବର୍ଗ ସେ.ମି.କୁ 15 ପଇସା ହିସାବରେ ଟ. 18.90 ଖର୍ଚ୍ଚ ହେଲା । କାଠବାଡ଼ିଟିର ଉଚ୍ଚତା $8\sqrt{3}$ ସେ.ମି. ହେଲେ, ଭୂମିର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କେତେ ? ($\sqrt{3} \cong 1\frac{3}{4}$)

(ସିଲିଣ୍ଡରର ପୃଷ୍ଠତଳ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ)

11. ଗୋଟିଏ ସିଲିଣ୍ଡରର ଭୂମିର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r, ବ୍ୟାସ d ଏବଂ ଉଚ୍ଚତା h ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହେଲେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକ ସମାଧାନ କର। ($\pi \simeq \frac{22}{7}$)

(a) d = 16 ସେ.ମି., h = 21 ସେ.ମି. ହେଲେ ବକ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ କେତେ ?

(b) ବକ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 1188 ବ.ମି., d = 18 ମି. ହେଲେ, h କେତେ ?

(c) ଭୂମିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 1386 ବ.ସେ.ମି. ଓ h = 36 ସେ.ମି. ହେଲେ, ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ କେତେ ?

12. ଗୋଟିଏ ରୋଲର୍‌ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 1.6 ମି. ଏବଂ ଉଚ୍ଚତା 70 ସେ.ମି.। ଏହା କେତେଥର ଘୂରିଲେ 26.4 ଏୟର୍ ସ୍ଥାନ ସମତଳ କରିପାରିବ ? ($\pi \simeq \frac{22}{7}$)

13. 1540 ବର୍ଗମିଟର ଭୂମିରେ ଗୋଟିଏ ରୋଲର୍ 90ଥର ଗଡ଼ାଇବାକୁ ପଡ଼େ। ରୋଲର୍‌ଟିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଏହାର ବ୍ୟାସ ସହିତ ସମାନ ହେଲେ ଏହାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର। ($\pi \simeq \frac{22}{7}$)

14. ଗୋଟିଏ ସିଲିଣ୍ଡର ଆକାର ସ୍ତମ୍ଭର ବକ୍ରପୃଷ୍ଠତଳକୁ ରଙ୍ଗ କରିବାର ପ୍ରତି ବର୍ଗମିଟରକୁ 60 ପଇସା ହିସାବରେ 792 ଟଙ୍କା ଖର୍ଚ୍ଚ ହେଲା। ଏହାର ଭୂମିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 154 ବର୍ଗ ମିଟର ହେଲେ ଏହାର ଉଚ୍ଚତା କେତେ ? ($\pi \simeq \frac{22}{7}$)

15. ଗୋଟିଏ ଦୁଇପାଖ ଖୋଲା ଫମ୍ପା ସିଲିଣ୍ଡରର ବହିଃ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 5ମି.। ଏହାର ଉଚ୍ଚତା 14ମି. ଏବଂ ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 748 ବ.ମି. ହେଲେ, ଏହାର ଅନ୍ତଃ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର। ($\pi \simeq \frac{22}{7}$)

16. ଗୋଟିଏ ଲୁହା ନଳ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 84 ସେ.ମି. । ଏହାର ବେଧ 2 ସେ.ମି. । ଭୂମିର ବହିଃ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 8 ସେ.ମି. ହେଲେ, ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

17. ଗୋଟିଏ ଲୁହା ନଳର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 100 ସେ.ମି. ଏବଂ ଲୁହାର ପ୍ରସ୍ଥ 4 ସେ.ମି. । ଏହାର ସମଗ୍ରପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 9152 ବ.ସେ.ମି. ହେଲେ ଭୂମିର ବହିଃବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଓ ଅନ୍ତଃବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ($\pi \simeq \frac{22}{7}$)

5.8. ସୁଷମ ଘନ ପଦାର୍ଥର ଆୟତନ (Volume of regular solids) :

ପ୍ରତ୍ୟେକ ଘନ ପଦାର୍ଥ ବାୟୁରେ, ଜଳରେ ବା ଶୂନ୍ୟରେ କିଛି ସ୍ଥାନ ଅଧିକାର କରିଥାଏ। ଅଧିକୃତ ସ୍ଥାନର ପରିମାପକୁ ଘନ ପଦାର୍ଥର ଆୟତନ ବା ଘନଫଳ (volume) କୁହାଯାଏ।

ଘନ ପଦାର୍ଥର ଆୟତନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ ପଦାର୍ଥର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ପ୍ରସ୍ଥ ଓ ଉଚ୍ଚତା ତିନିଗୋଟି ମାପ ଆବଶ୍ୟକ। ତେଣୁ ଆୟତନ ଏକ ତ୍ରିମାତ୍ରିକ (Three dimensional) ରାଶି ଅଟେ।

ପୂର୍ବରୁ ବର୍ଣ୍ଣିତ ହୋଇଛି ଯେ ପ୍ରିଜିମ୍, ଆୟତଘନ, ସମଘନ ଓ ସିଲିଣ୍ଡରର ଗଠନରେ ସାଦୃଶ୍ୟ ଅଛି। ତେଣୁ ଏଗୁଡ଼ିକର ଆୟତନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପାଇଁ ଏକ ସାଧାରଣ ସୂତ୍ର ବ୍ୟବହୃତ ହୁଏ।

ସାଧାରଣ ସୂତ୍ରଟି ହେଲା | ଆୟତନ = ଭୂମିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ × ଉଚ୍ଚତା |

(କ) ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଆୟତନ :

ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଆୟତନ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସୂତ୍ର ନାହିଁ। କାରଣ ଏହାର ଭୂମି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଆକାରର ନୁହେଁ। ତେଣୁ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଆୟତନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କଲାବେଳେ ସାଙ୍କେତିକ ସୂତ୍ର ପରିବର୍ତ୍ତେ ସାଧାରଣ ସୂତ୍ରଟି ପ୍ରୟୋଗ କରାଯାଏ।

ଅର୍ଥାତ୍ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଆୟତନ = ଭୂମିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ × ଉଚ୍ଚତା

(ଖ) ନିଦା ସରଳ ସିଲିଣ୍ଡରର ଆୟତନ :

ସିଲିଣ୍ଡରର ଭୂମିର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r ଏବଂ ଉଚ୍ଚତା h ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହେଲେ ଏହାର ଭୂମିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = πr^2 ହେବ ଏବଂ ଆୟତନ = ଭୂମିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ × ଉଚ୍ଚତା = $\pi r^2 \times h$

∴ | ନିଦା ସରଳ ସିଲିଣ୍ଡରର ଆୟତନ = $\pi r^2 h$ ଘନ ଏକକ |

(ଗ) ଫମ୍ପା ସରଳ ସିଲିଣ୍ଡରର ଆୟତନ :

ଫମ୍ପା ସରଳସିଲିଣ୍ଡରର ବହିଃ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ R ଏବଂ ଅନ୍ତଃବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r ଏବଂ ଉଚ୍ଚତା h ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହେଲେ ଭୂମିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\pi(R^2 - r^2)$ ହେବ ଏବଂ ଆୟତନ = ଭୂମିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ × ଉଚ୍ଚତା

= $\pi(R^2 - r^2) \times h$ ହେବ।

∴ | ଫମ୍ପା ସରଳସିଲିଣ୍ଡରର ଆୟତନ = $\pi(R^2 - r^2)\, h$ ଘନ ଏକକ। |

ସମାହିତ ପ୍ରଶ୍ନାବଳୀ (ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଆୟତନ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ) :

ଉଦାହରଣ-7 : ଗୋଟିଏ ସରଳ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ବାହୁତ୍ରୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 12 ସେ.ମି., 5 ସେ.ମି., 13 ସେ.ମି.। ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଉଚ୍ଚତା 10 ସେ.ମି. ହେଲେ ଏହାର ଆୟତନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ : ତ୍ରିଭୁଜାକାର ଭୂମିବିଶିଷ୍ଟ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଭୂମିର ବାହୁତ୍ରୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 12 ସେ.ମି., 5 ସେ.ମି. ଓ 13 ସେ.ମି. ଏବଂ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଉଚ୍ଚତା 10 ସେ.ମି.

∵ $13^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow$ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଭୂମି ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ।

ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଭୂମିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2} \times 12 \times 5 = 30$ ବ.ସେ.ମି.

ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଘନଫଳ = ଭୂମିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ × ଉଚ୍ଚତା = 30 × 10 = 300 ଘନ ସେ.ମି.

∴ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଆୟତନ = 300 ଘ.ସେ.ମି. ଅଟେ । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ-8 : ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜାକାର ସରଳ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଆୟତନ 37800 ଘ.ମି. ଏବଂ ଭୂମିର ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 39ମି., 42ମି. ଓ 45ମି. । ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଉଚ୍ଚତା ଓ ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ତ୍ରିଭୁଜାକାର ଭୂମିର ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, a ମି., b ମି. ଓ c ମି. ।

∴ a = 39 ମି., b = 42 ମି., c = 45 ମି.

ମନେକର ଭୂମିର ଅର୍ଦ୍ଧ ପରିସୀମା (s) = $\frac{39+42+45}{2}$ ମି. = 63 ମି.

ଏହି ତ୍ରିଭୁଜାକାର ଭୂମିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{63(63-39)(63-42)(63-45)} = \sqrt{63\times 24\times 21\times 18}$ = 756 ବ.ମି.

∴ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଉଚ୍ଚତା = $\frac{\text{ଆୟତନ}}{\text{ଭୂମିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ}} = \frac{37800}{756}$ ମି = 50ମି.

∴ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ପାର୍ଶ୍ୱପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ଭୂମିର ପରିସୀମା × ଉଚ୍ଚତା = (39+ 42 + 45) × 50
= 126 × 50 = 6300 ବ.ମି.

∴ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ସମଗ୍ରପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ପାର୍ଶ୍ୱ ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ + 2 × ଭୂମିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ
= 6300 + 2 × 756 = 7812 ବ.ମି. (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ-9 : 10 ସେ.ମି. ଉଚ୍ଚତା ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ସରଳ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଭୂମି ଗୋଟିଏ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ । ଏହି ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଆୟତନ 120 ଘ.ସେ.ମି. ହେଲେ ଏହାର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ($\sqrt{3} \simeq 1.732$)

ସମାଧାନ : ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଉଚ୍ଚତା = 10 ସେ.ମି. ଏବଂ ଏହାର ଆୟତନ = 120 ଘ.ସେ.ମି.

ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଭୂମିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{\text{ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଆୟତନ}}{\text{ଉଚ୍ଚତା}} = \frac{120}{10}$ = 12 ବ.ସେ.ମି.

∵ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଭୂମି ଗୋଟିଏ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ତେଣୁ ଭୂମିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{\sqrt{3}}{4}$ × (ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ)^2

∴ $\frac{\sqrt{3}}{4}$(ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ)^2 = 12 ⇒ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = $\sqrt{\frac{12\times 4}{\sqrt{3}}}$ ସେ.ମି.

ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = $\sqrt{16\sqrt{3}} = \sqrt{16\times 1.732}$ = 5.264 ସେ.ମି.

∴ ଭୂମିର ପରିସୀମା = 5.264 × 3 = 15.792 ସେ.ମି.

ପାର୍ଶ୍ୱପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ଭୂମିର ପରିସୀମା × ଉଚ୍ଚତା = 15.792 × 10 = 157.92 ବ.ସେ.ମି.

∴ ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ପାର୍ଶ୍ୱ ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ + 2 ଭୂମିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ
= 157.92 + 2 × 12 = 181.92 ବ.ସେ.ମି. (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ-10 : ଗୋଟିଏ ସରଳ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଭୂମି ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ଏବଂ ସମକୋଣ ସଂଲଗ୍ନ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଅନୁପାତ 5 : 12 । ଯଦି ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଆୟତନ 1800 ଘ.ସେ.ମି. ଓ ପାର୍ଶ୍ୱ ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 900 ବ.ସେ.ମି. ହୁଏ, ତେବେ ଭୂମିର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜାକାର ଭୂମିର ସମକୋଣ ସଂଲଗ୍ନ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 5x ସେ.ମି. ଓ 12x ସେ.ମି. ।

∴ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = $\sqrt{(5x)^2+(12x)^2} = \sqrt{25x^2+144x^2} = \sqrt{169x^2} = 13x$ ସେ.ମି.

∴ ଭୂମିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2} \cdot 5x \cdot 12x$ ବ.ସେ.ମି. = $30x^2$ ବ.ସେ.ମି. ।

ମନେକର ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଉଚ୍ଚତା h ସେ.ମି.

∴ ଆୟତନ = ଭୂମିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ × ଉଚ୍ଚତା = $30x^2h$ ଘ.ସେ.ମି. $\Rightarrow 30x^2h = 1800$ ....(i)

ଭୂମିର ପରିସୀମା = 5x + 12x + 13x = 30x ସେ.ମି.

ପୁନଶ୍ଚ, ଏହାର ପାର୍ଶ୍ୱ ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ଭୂମିର ପରିସୀମା × ଉଚ୍ଚତା = 30xh ବ.ସେ.ମି.

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ 30xh = 900 ....(ii)

ବର୍ତ୍ତମାନ (i) କୁ (ii) ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ $\frac{30x^2h}{30xh} = \frac{1800}{900} \Rightarrow x = 2$

∴ ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 5x = 5 × 2 = 10 ସେ.ମି.

ଅନ୍ୟବାହୁଟିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 12x = 12 × 2 = 24 ସେ.ମି. (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ-11 : ଗୋଟିଏ ସରଳ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଘନଫଳ 4500 ଘ.ମି. । ଏହାର ଭୂମି ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ଯାହାର କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 41 ମିଟର । ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଉଚ୍ଚତା 25ମି. ହେଲେ ଏହାର ଭୂମିର ଅନ୍ୟ ଦୁଇବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜାକାର ଭୂମିର ବାହୁଦୁଇଟିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = a ମିଟର ଏବଂ b ମିଟର ।

$a^2 + b^2 = 41^2 = 1681$ ଏବଂ ଭୂମିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ab ବ.ମି.

କିନ୍ତୁ ଭୂମିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{\text{ଘନଫଳ}}{\text{ଉଚ୍ଚତା}} = \frac{4500 \text{ ଘନ.ମି.}}{25\text{ମି.}}$ = 180 ବ.ମି.

$\Rightarrow \frac{1}{2} ab = 180 \Rightarrow ab = 360 \Rightarrow 2ab = 720$

$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \Rightarrow (a + b)^2 = 41^2 + 720 = 2401$

$\Rightarrow a + b = \sqrt{2401} = 49$ ....(i)

ସେହିପରି $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = 41^2 - 720 = 961$

$\Rightarrow a - b = \sqrt{961} = 31$ ....(ii)

(i) ଓ (ii) ରୁ $2a = 80 \Rightarrow a = 40$ ମି.

$\therefore$ $b = 49 - 40 = 9$ ମି.

$\therefore$ ଭୂମିର ଅନ୍ୟ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 40 ମି. ଏବଂ 9 ମି. । (ଉତ୍ତର)

ସିଲିଣ୍ଡରର ଆୟତନ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ :

ଉଦାହରଣ-12 : ଗୋଟିଏ ନିଦା ସରଳ ସିଲିଣ୍ଡରର ଘନଫଳ 101376 ଘ.ଡେ.ମି.; ଏହାର ଭୂମିର ପ୍ରସ୍ଥ 48 ଡେ.ମି. ହେଲେ ଏହାର ଉଚ୍ଚତା କେତେ ? $(\pi \simeq \frac{22}{7})$

ସମାଧାନ : ମନେକର ସିଲିଣ୍ଡରର ଉଚ୍ଚତା = h ଡେ.ମି., ଭୂମିର ପ୍ରସ୍ଥ = ଭୂମିର ବ୍ୟାସ (2r) = 48 ଡେ.ମି.

$\Rightarrow$ r = 24 ଡେ.ମି.

ଘନଫଳ = $\pi r^2 h = \frac{22}{7} \times 24^2 \times h$

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ, ଏହାର ଘନଫଳ = 101376 ଘ.ଡେ.ମି. $\Rightarrow \frac{22 \times 24 \times 24h}{7} = 101376$

$\Rightarrow$ ସିଲିଣ୍ଡରର ଉଚ୍ଚତା (h) = $\frac{101376 \times 7}{22 \times 24 \times 24}$ ଡେ.ମି. = 56 ଡେ.ମି. (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ-13 : ଗୋଟିଏ ସରଳ ସିଲିଣ୍ଡରର ଘନଫଳ 12672 ଘ.ମି.। ଏହାର ବକ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 2112 ବ.ମି. ହେଲେ ଭୂମିର ପରିଧି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର। $(\pi \simeq \frac{22}{7})$

ସମାଧାନ : ମନେକର ସିଲିଣ୍ଡରର ଭୂମିର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ = r ମିଟର ଏବଂ ଉଚ୍ଚତା = h ମିଟର

ଏହାର ଘନଫଳ = $\pi r^2 h$ = 12672 ଘ.ମି. ....(i)

ଏବଂ ଏହାର ବକ୍ରପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $2\pi rh$ ବ.ମି. = 2112 ବ.ମି. ....(ii)

$\therefore$ (i) ଏବଂ (ii)ରୁ ପାଇବା $\frac{\pi r^2 h}{2\pi rh} = \frac{12672}{2112} \Rightarrow \frac{r}{2} = 6 \Rightarrow r = 12$

$\therefore$ ଭୂମିର ପରିଧି = $2\pi r = 2 \times \frac{22}{7} \times 12 = \frac{528}{7} = 75\frac{3}{7}$ ମିଟର (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ-14 : ଗୋଟିଏ ସରଳ ନିଦା ସିଲିଣ୍ଡର ଆକାର ବିଶିଷ୍ଟ କାଠର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 24 ଡେ.ମି.। ପ୍ରତି ଘନ ଡେ.ମି.କୁ 75 ପଇସା ହିସାବରେ 77 ଟଙ୍କା ଦେଇ କାଠଟି କିଣାଗଲା। କାଠଟିର ପ୍ରତ୍ୟେକ ପ୍ରାନ୍ତର ପରିଧି କେତେ ?

ସମାଧାନ : ଏକ ଘନ ଡେ.ମି. କାଠର ମୂଲ୍ୟ 75 ପଇସା।

$\therefore$ 77 ଟଙ୍କାରେ କିଣାଯାଇଥିବା କାଠର ଘନ ପରିମାଣ = $\frac{7700}{75} = \frac{308}{3}$ ଘନ ଡେ.ମି.

ମନେକର ଏହାର ଭୂମିର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ = r ଡେ.ମି., ଏହାର ଉଚ୍ଚତା (h) = 24 ଡେ.ମି.

କାଠର ଘନଫଳ = πr^2h ଘନ ଡେ.ମି.

$$\Rightarrow \quad \pi r^2h = \frac{308}{3} \Rightarrow \frac{22}{7}r^2 \times 24 = \frac{308}{3} \Rightarrow r^2 = \frac{308 \times 7}{22 \times 24 \times 3} = \frac{49}{36} \Rightarrow r = \frac{7}{6} \text{ ଡେ.ମି.}$$

$\therefore$ ପରିଧି = $2\pi r = 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{6} = \frac{22}{3} = 7\frac{1}{3}$ ଡେ.ମି.।

$\therefore$ କାଠଟିର ପ୍ରତ୍ୟେକ ପ୍ରାନ୍ତର ପରିଧି $7\frac{1}{3}$ ଡେ.ମି.। (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5(d)

(ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଆୟତନ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ)

1. ଗୋଟିଏ ସରଳ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 2520 ବର୍ଗମିଟର। ଏହାର ତ୍ରିଭୁଜାକାର ଆଧାରର ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 20 ମି., 21 ମି. ଓ 29 ମିଟର ହେଲେ, ଆୟତନ ସ୍ଥିର କର।

2. ଗୋଟିଏ ସରଳ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଭୂମି, $8\sqrt{2}$ ସେ.ମି. ଦୀର୍ଘ କର୍ଣ୍ଣ ବିଶିଷ୍ଟ ସମକୋଣୀ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ। ଉଚ୍ଚତା 14 ସେ.ମି. ହେଲେ ଆୟତନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

3. ଗୋଟିଏ ସରଳ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଆୟତନ 2520 ଘନ ମିଟର। ଏହାର ଆଧାର ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ଯାହାର ସମକୋଣ ସଂଲଗ୍ନ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 7 ମି. ଓ 24 ମିଟର। ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଉଚ୍ଚତା ଓ ପାର୍ଶ୍ୱ ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସ୍ଥିର କର।

4. 15 ସେ.ମି. ଉଚ୍ଚ ଗୋଟିଏ ସରଳ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଆଧାର ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ଯାହାର କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 10 ସେ.ମି., ଆୟତନ 360 ଘନ ସେ.ମି. ହେଲେ ଆଧାରର ଅନ୍ୟ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

5. ଗୋଟିଏ ସରଳ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ପାର୍ଶ୍ୱତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ, ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳ କ୍ଷେତ୍ରଫଳର $\frac{8}{9}$। ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ପାର୍ଶ୍ୱ ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 96 ବର୍ଗ ମିଟର ଏବଂ ଆୟତନ 48 ଘନମିଟର ହେଲେ ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

6. ଗୋଟିଏ ସରଳ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଆଧାର ପରିସୀମା 56 ମିଟର। ପାର୍ଶ୍ୱପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 1680 ବର୍ଗ ମିଟର ଏବଂ ଆୟତନ 2520 ଘନମିଟର ହେଲେ ଆଧାରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

7. ଗୋଟିଏ ସରଳ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଆୟତନ $84\sqrt{3}$ ଘ.ସେ.ମି.। ଉଚ୍ଚତା 7 ସେ.ମି. ଏବଂ ଆଧାର ଏକ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ହେଲେ ଆଧାରର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

8. ଗୋଟିଏ ସରଳ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଉଚ୍ଚତା 336 ସେମି.। ଏହାର ଭୂମିର ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 21 ସେ.ମି., 72 ସେ.ମି. ଓ 75 ସେ.ମି। 288 ସେ.ମି. ଉଚ୍ଚତା ଏବଂ $42\sqrt{2}$ ସେ.ମି. ଦୀର୍ଘ କର୍ଣ୍ଣ ଥିବା ସମକୋଣୀ

ତ୍ରିଭୁଜାକାର ଭୂମି ବିଶିଷ୍ଟ ଅନ୍ୟ ଏକ ସରଳ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଘନଫଳ ଯଦି ଏହି ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଘନଫଳ ସହିତ ସମାନ ହୁଏ, ତେବେ ଭୂମିର ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

9. $8\sqrt{3}$ ମିଟର ଉଚ୍ଚତା ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ସରଳ ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଭୂମି ଗୋଟିଏ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ। ଏହି ପ୍ରିଜିମ୍‌ର ଆୟତନ 864 ଘନମିଟର ହେଲେ ଏହାର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସିଲିଣ୍ଡରର ଆୟତନ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ :

10. 4 ମିଟର ବ୍ୟାସ ଓ 9 ମିଟର ଗଭୀର କୂଅଟିଏ ଖୋଳାଯାଇ ସେଥିରୁ ବାହାରିଥିବା ମାଟିକୁ 12 ମିଟର ବ୍ୟାସର ଏକ ସିଲିଣ୍ଡର ଆକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ସ୍ତୂପରେ ଗଦାକଲେ, ସ୍ତୂପଟିର ଉଚ୍ଚତା କେତେ ହେବ ?

11. ଗୋଟିଏ ସିଲିଣ୍ଡର ଆକାରର ସ୍ତମ୍ଭ ତିଆରି କରିବାକୁ ପ୍ରତି 100 ଘନ ଡେ.ମି.କୁ 8 ଟଙ୍କା ହିସାବରେ 352 ଟଙ୍କା ଖର୍ଚ୍ଚ ହୁଏ। ସ୍ତମ୍ଭଟିର ଭୂମିର ବ୍ୟାସ 20 ଡେ.ମି. ହେଲେ ଏହାର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର। $(\pi \simeq \frac{22}{7})$

12. 28 ମିଟର ଉଚ୍ଚ ଗୋଟିଏ ସିଲିଣ୍ଡରର ଆୟତନ $5\frac{1}{2}$ ମିଟର ଦୀର୍ଘ ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ସମଘନର ଘନଫଳ ସଙ୍ଗେ ସମାନ। ସିଲିଣ୍ଡରର ଭୂମିର ବ୍ୟାସ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର। $(\pi \simeq \frac{22}{7})$

13. ଗୋଟିଏ ସିଲିଣ୍ଡରର ଘନଫଳ 9504 ଘନ ସେ.ମି.। ବକ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 1584 ବ.ସେ.ମି.। ଏହାର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର। $(\pi \simeq \frac{22}{7})$

14. ଗୋଟିଏ ସିଲିଣ୍ଡରର ଉଚ୍ଚତା ଭୂମିର ବ୍ୟାସର ଦୁଇଗୁଣ। ଏହାର ଘନଫଳ 539 ଘ.ଡେ.ମି. ହେଲେ ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ କେତେ ? $(\pi \simeq \frac{22}{7})$

15. ଗୋଟିଏ ନିଦା ସମବର୍ତ୍ତୁଳର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $701\frac{1}{4}$ ବ.ସେ.ମି. ଓ ବକ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳ 528 ବ.ସେ.ମି. ହେଲେ ଆୟତନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

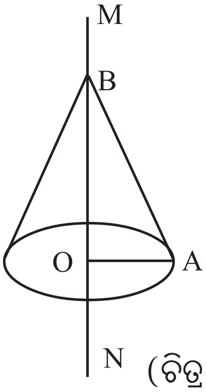
16. ଗୋଟିଏ ସରଳ ବୃତ୍ତଭୂମିକ ସିଲିଣ୍ଡରର ଉଚ୍ଚତା ଓ ବ୍ୟାସର ଅନୁପାତ 3:2। ଏହାର ସମଗ୍ରପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 1232 ବ.ସେ.ମି. ହେଲେ, ଏହାର ଘନଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର। $(\pi \simeq \frac{22}{7})$

17. ଉଭୟ ପ୍ରାନ୍ତ ବନ୍ଦ ହୋଇଥିବା ଗୋଟିଏ ଫମ୍ପା ସିଲିଣ୍ଡରରେ ବ୍ୟବହୃତ ଧାତୁର ଘନଫଳ 4928 ଘ. ସେ.ମି. ଏବଂ ଏହାର ପୃଷ୍ଠତଳଦ୍ୱୟର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଅନ୍ତର 352 ବ.ସେ.ମି.। ସିଲିଣ୍ଡରର ଉଚ୍ଚତା 28 ସେ.ମି. ହେଲେ, ଏହାର ଭିତର ଓ ବାହାର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ କେତେ ? $(\pi \simeq \frac{22}{7})$

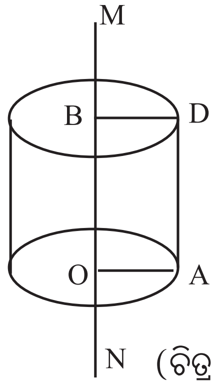
5.9. କୋନ୍‌ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଓ ଆୟତନ (Surface Area and Volume of cone) :

ସ୍ଥିର ରହିଥିବା ଏକ ସରୁଛିଦ୍ର ଦେଇ ବାଲି, ଚିନି, ଚାଉଳ, ଅଟା, ସୁଜି ପରି ଶୁଖିଲା କ୍ଷୁଦ୍ରକଣିକା ସମତଳ ଭୂମି ଉପରେ ପକାଇଲେ, ତାହା ଯେଉଁ ଆକୃତିରେ ଗଦାହେବ, ତାହା ଏକ ସରଳ ବୃତ୍ତଭୂମିକ କୋନ (Right circular cone)ର ଆକୃତି ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ନିମ୍ନ ପରୀକ୍ଷାଟି କର । ଗୋଟିଏ ମୋଟା କାଗଜକୁ ଏକ ସମକୋଣୀ ΔAOB ଆକୃତିର କାଟ (ଚିତ୍ର 5.23(a))

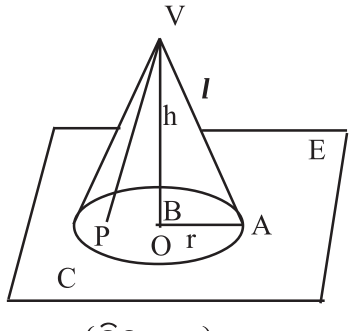


(ଚିତ୍ର 5.23(a))



(ଚିତ୍ର 5.23(b))

ସମକୋଣ ସଂଲଗ୍ନ ଗୋଟିଏ ବାହୁକୁ (ମନେକର $\overline{OB}$) ଅଠା ଦ୍ୱାରା ଏକ ସରୁ କାଠି $\overline{MN}$ ରେ ଲଗାଇ ତ୍ରିଭୁଜାକୃତି କାଗଜଟିକୁ $\overline{MN}$ କାଠି ଚାରିପଟେ ଘୂରାଇଲେ ସରଳ ବୃତ୍ତଭୂମିକ କୋନ୍‌ର ଆକୃତି ମିଳିବ । $\overline{OA}$ ଏହି ବୃତ୍ତାକାର ଭୂମିର ଏକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ହେବ । ସେହିପରି ମୋଟା କାଗଜଟିଏ AOBD ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରାକୃତିରେ କାଟି $\overline{OB}$ ଅକ୍ଷ ଚାରି ପଟେ ଘୁରାଇଲେ ବୃତ୍ତାକାର ସରଳ ସିଲିଣ୍ଡର ଆକୃତି ମିଳିବ । (ଚିତ୍ର 5.23(b)) । ବର୍ତ୍ତମାନ ଏକ ବୃତ୍ତଭୂମିକ କୋନ୍‌ର ସଂଜ୍ଞା ନିମ୍ନମତେ କରିବା ।



(ଚିତ୍ର 5.24)

C ସମତଳ E ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବୃତ୍ତ ଓ O ଏହାର କେନ୍ଦ୍ର (ଚିତ୍ର 5.24) । V, ସମତଳ E ର ବହିର୍ଦ୍ଦେଶରେ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଏବଂ P,C ଦ୍ୱାରା ଆବଦ୍ଧ ବୃତ୍ତାକାର କ୍ଷେତ୍ର B ଉପରିସ୍ଥ ଯେକୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ଆମେ $\overline{VP}$ ରେଖାଖଣ୍ଡ ପାଇବା । B ଉପରିସ୍ଥ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ପାଇଁ ମିଳୁଥିବା ଏହି ପରି ସମସ୍ତ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଗୁଡ଼ିକର ସଂଯୋଗରେ କୋନ୍ (cone) ଗଠିତ ହୁଏ । $\overline{VO}$, ସମତଳ E ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହେଲେ କୋନ୍‌କୁ ସରଳକୋନ୍ କୁହାଯାଏ; ନତୁବା ତୀର୍ଯ୍ୟକ କୋନ୍ କୁହାଯାଏ । ଆମେ କେବଳ ସରଳ କୋନ୍ ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

A, ବୃତ୍ତ C ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ $\overline{VA}$ କୁ କୋନ୍‌ର ଏକ ଜେନେରେଟର (Generator) ବା ଜନକ ରେଖା କୁହାଯାଏ । V କୁ ବୃତ୍ତ C ଉପରିସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁ ସହ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଦ୍ୱାରା ଯୋଗ କରାଯାଉ । ଏହି ରେଖାଖଣ୍ଡମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଏକ ବକ୍ରତଳ ସୃଷ୍ଟି ହେବ । ଏହି ବକ୍ରତଳ ଏକ ସରଳବୃତ୍ତ ଭୂମିକ କୋନ୍‌ର ପୃଷ୍ଠତଳ ଅଟେ । C ଦ୍ୱାରା ଆବଦ୍ଧ ବୃତ୍ତାକାର କ୍ଷେତ୍ର B କୁ **କୋନ୍‌ର ଭୂମି ବା ଆଧାର (Base)** କୁହାଯାଏ । (ବି.ଦ୍ର. C ବକ୍ରଟି ବୃତ୍ତ ପରିବର୍ତ୍ତେ ଏକ ବହୁଭୁଜ ହେଲେ ଉତ୍ପନ୍ନ ଘନକୁ ପିରାମିଡ଼ (Pyramid) କୁହାଯାଏ ।) 'V' ବିନ୍ଦୁକୁ କୋନ୍‌ର **ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁ (Vertex)** $\overline{VO}$ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ଏହାର ଅକ୍ଷ (axis) ଏବଂ $\overline{VO}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ (= h) କୁ **କୋନ୍‌ର ଉଚ୍ଚତା** କୁହାଯାଏ । ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ OA(=r) କୁ କୋନ୍‌ର ଭୂମିର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ କୁହାଯାଏ । $\overline{VA}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ (=*l*) କୁ **କୋନ୍‌ର ବକ୍ର ଉଚ୍ଚତା (Slant height)** କୁହାଯାଏ । ତେଣୁ

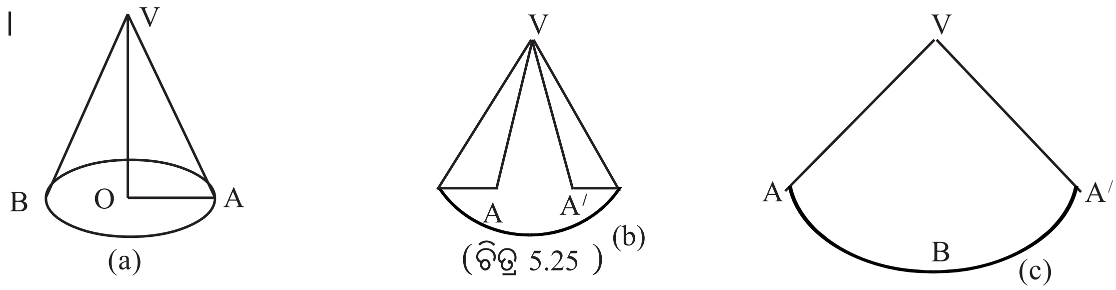
$l^2 = VA^2 = VO^2 + OA^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow$ $\boxed{l = \sqrt{h^2 + r^2}}$

$\angle OVA$ କୁ କୋନ୍‌ର **ଶୀର୍ଷାର୍ଦ୍ଧ କୋଣ** (Semivertical angle) କୁହାଯାଏ ।

ମନ୍ତବ୍ୟ : ଯଦି ଏକ କୋନ୍‌ର ଭୂମି ବୃତ୍ତାକାର କ୍ଷେତ୍ର ନ ହୋଇ, କେବଳ ବୃତ୍ତଟିଏ ହୁଏ, ତେବେ ଉତ୍ପନ୍ନ କୋନ୍‌କୁ ଏକ **ଫମ୍ପା (hollow) କୋନ୍** କୁହାଯାଏ । ତରଳ ପଦାର୍ଥ ଢାଳିବା ପାଇଁ ବ୍ୟବହାର ହେଉଥିବା କାହାଳୀ (Funnel) ର ମୁନିଆଁ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିବା ଲମ୍ବା ବେଣ୍ଟଟିକୁ ବାଦଦେଲେ ବାକି ଅଂଶ ଫମ୍ପା କୋନ ଆକୃତିର ହେବ । ଅନୁରୂପ ଭାବରେ ଫମ୍ପା ପ୍ରିଜିମ୍ ଓ ଫମ୍ପା ସିଲିଣ୍ଡରର ଧାରଣା କରିହେବ । ତେବେ କେବଳ କୋନ୍ କହିଲେ ଆମେ ବୃତ୍ତାକାର କ୍ଷେତ୍ର ବିଶିଷ୍ଟ ଭୂମି ଥିବା କୋନ୍‌କୁ (ବା ନିଦା କୋନ୍) ବୁଝିବା ।

କୋନ୍‌ର ଦୁଇଟି ପୃଷ୍ଠତଳ ଓ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଆୟତନ ଅଛି । ବୃତ୍ତାକାର ଭୂମିଟି ଏକ ସମତଳପୃଷ୍ଠ; ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ πr^2 ବର୍ଗ ଏକକ । କୋନ୍ ର ବକ୍ରତଳଟିକୁ ତା'ର ପାର୍ଶ୍ୱପୃଷ୍ଠ ତଳ କୁହାଯାଏ । ଫମ୍ପା କୋନର କେବଳ ବକ୍ରତଳଟି ଥାଏ ।

ବକ୍ରତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଷୟରେ ଧାରଣା କରିବା ପାଇଁ ପତଳା ଟିଣ ଚାଦରରେ ତିଆରି ଏକ ଫମ୍ପା କୋନ୍ VAB ନିଆଯାଉ ।



(ଚିତ୍ର 5.25)

ମନେକର ଏହାର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r ଏବଂ ବକ୍ର ଉଚ୍ଚତା l । କୌଣସି ଏକ ଜନକ ରେଖା $\overline{VA}$ ର A ଠାରେ କୋନ୍‌ଟିକୁ କାଟି (ଚିତ୍ର 5.25 -b) ଖୋଲି ଦେଲେ, ତାହା ଏକ ବୃତ୍ତକଳାରେ ପରିଣତ ହେବ । (ଚିତ୍ର 5.25-c) ।

ବୃତ୍ତକଳାର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ = $VA = VA^1$ । କାରଣ କାଟିବା ପୂର୍ବରୁ, A ଓ A^1 ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ଏକ ଥିଲେ । ତେଣୁ ବୃତ୍ତକଳାର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $VA = VA^1 = l$ । କୋନ୍‌ର ବୃତ୍ତାକାର ଧାର ବୃତ୍ତକଳାର ଚାପ $\widehat{ABA'}$ ରେ ପରିଣତ ହୋଇଛି ।

ତେଣୁ $\widehat{ABA'}$ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, କୋନ୍‌ର ଧାରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $2\pi r$ ସହ ସମାନ ।

$\therefore$ VAB କୋନ୍‌ର ବକ୍ରତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ବୃତ୍ତକଳା $VABA^1$ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

= $\frac{1}{2}$ (ABA$'$ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ) × ବୃତ୍ତକଳାର ବ୍ୟସାର୍ଦ୍ଧ = $\frac{1}{2}(2\pi r)\, l$ ବ.ଏକକ = $\pi r\, l$ ବ.ଏକକ

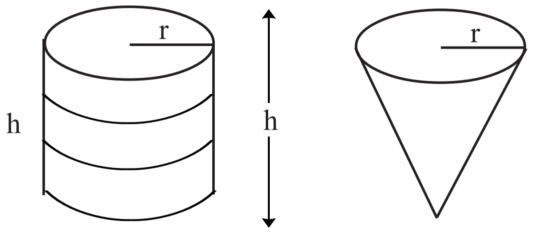
ନିଦା କୋନ୍‌ର ବକ୍ରତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ପାଇଁ ମଧ୍ୟ ଏହି ସୂତ୍ର ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ।

$\therefore$ କୋନ୍‌ର ବକ୍ରତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = πrl ବ.ଏକକ

କୋନ୍‌ର ସମଗ୍ରପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ଭୂମିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ + ବକ୍ରତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$= \pi r^2 + \pi r l = \pi r (r + l)$ ବର୍ଗ ଏକକ

କୋନର ଆୟତନ = $\frac{1}{3}$ (ଭୂମିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ) × ଉଚ୍ଚତା = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ ଘନ ଏକକ

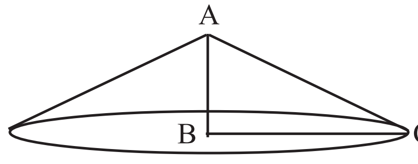


(ଚିତ୍ର 5.26)

ଏହାର ପ୍ରମାଣ ପାଇଁ ଉଚ୍ଚତର ଗଣିତଶାସ୍ତ୍ରର ସାହାଯ୍ୟ ଆବଶ୍ୟକ । ତେବେ ତୁମେ ନିମ୍ନ ପରୀକ୍ଷାଟିରୁ ସୂତ୍ରଟିର ସତ୍ୟତା ଜାଣିପାରିବ । ଗୋଟିଏ ସିଲିଣ୍ଡର ଆକୃତିର ଗ୍ଲାସ ନିଅ (ଚିତ୍ର 5.26) । ଗୋଟିଏ ମୋଟା କାଗଜକୁ ଗୁଡ଼ାଇ ଏକ ଫମ୍ପା କୋନ୍ ଆକୃତିର କର ଯେପରିକି ଉଭୟର ଉଚ୍ଚତା ଏବଂ ଭୂମିର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ସମାନ ହେବ । କୋନ୍ ଆକୃତିର କାଗଜ ପାତ୍ରରେ ଜଳପୂର୍ଣ୍ଣ କରି ଗ୍ଲାସରେ ରଖିଲେ 3 ଥରରେ ଗ୍ଲାସଟି ପୂର୍ଣ୍ଣହେବ ।

ଏଥିରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଜଣାପଡ଼େ ଯେ, ସିଲିଣ୍ଡରାକୃତି ଗ୍ଲାସ୍‌ର ଆୟତନ, କୋନ୍ ଆକୃତି ପାତ୍ରର ଆୟତନର ତିନିଗୁଣ । ଅର୍ଥାତ୍ କୋନାକୃତି ପାତ୍ରର ଆୟତନ = $\frac{1}{3}$ x ସିଲିଣ୍ଡରାକୃତି ଗ୍ଲାସ୍‌ର ଆୟତନ ।

ଉଦାହରଣ - 15 : ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ABC ର ସମକୋଣ ସଂଲଗ୍ନ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 12 ସେ.ମି. ଓ 5 ସେ.ମି. । ତ୍ରିଭୁଜଟିକୁ ତା'ର କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ବାହୁ $\overline{AB}$ ର ଚତୁର୍ଦ୍ଦିଗରେ ଘୂରାଇଲେ ଯେଉଁ କୋନ୍‌ଟି ଉତ୍ପନ୍ନ ହେବ ତାହାର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଓ ଘନଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।



(ଚିତ୍ର 5.27)

ସମାଧାନ : ମନେକର ABC ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର

AB = 5 ସେ.ମି., BC = 12 ସେ.ମି.

$\therefore$ AC = $\sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + 12^2}$

$= \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$ ସେ.ମି.

କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ବାହୁ $\overline{AB}$ ର ଚତୁର୍ଦ୍ଦିଗରେ ଘୂରାଇଲେ ଯେଉଁ କୋନ୍‌ଟି ଉତ୍ପନ୍ନ ହେବ ତାହାର ଆଧାରର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ BC ହେବ ।

$\therefore$ ଏହାର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ଆଧାରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ + ବକ୍ରତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

= $(\pi \times 12^2 + \pi \times 12 \times 13)$ ବର୍ଗ ସେ.ମି.

= $\pi . 12(12+13)$ ବର୍ଗ ସେ.ମି.= 300π ବର୍ଗ ସେ.ମି. (ଉତ୍ତର)

ଏହାର ଘନଫଳ = $\frac{1}{3} . \pi . 12^2 . 5$ ଘନ ସେ.ମି. = 240π ଘନ ସେ.ମି. (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 16 : ଗୋଟିଏ ସରଳ ବୃତ୍ତଭୂମିକ କୋନ୍ ଆକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ତମ୍ବୁର ଉଚ୍ଚତା 28 ମି.ଓ ଭୂମିର ବ୍ୟାସ 42 ମି. । ଏହି ତମ୍ବୁ ନିର୍ମାଣ ପାଇଁ କେତେ କାନ୍‌ଭାସ୍ କନା ଲାଗିବ ସ୍ଥିର କର । ($\pi \simeq \frac{22}{7}$)

ସମାଧାନ : ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ କୋନ୍‌ର ଭୂମିର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r = 21 ମି. ଓ ଉଚ୍ଚତା h = 28 ମି.

ଏହାର ବକ୍ର ଉଚ୍ଚତା $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{21^2 + 28^2} = \sqrt{441 + 784} = \sqrt{1225} = 35$ ମି.

ତମ୍ବୁଟିର ବକ୍ରତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\pi r l = \frac{22}{7} \times 21 \times 35$ ବର୍ଗ ମି. = 2310 ବ.ମି.

$\therefore$ ତମ୍ବୁଟିର ନିର୍ମାଣ ପାଇଁ 2310 ବର୍ଗମିଟର କନା ଲାଗିବ । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 17 : ସିଲିଣ୍ଡର ଆକାର ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ପାତ୍ରର ଭୂମିର ବ୍ୟାସ 8 ସେ.ମି. । ଏହା ଆଂଶିକ ଜଳପୂର୍ଣ୍ଣ ଅଛି । ଭୂମିର ବ୍ୟାସ 6 ସେ.ମି. ଓ ଉଚ୍ଚତା 8 ସେ.ମି. ଥିବା ଏକ ନିଦା କୋନ୍‌କୁ ଉକ୍ତ ଜଳରେ ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ରୂପେ ବୁଡ଼ାଇ ରଖିଲେ ଜଳସ୍ତର କେତେ ଉପରକୁ ଉଠିବ ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : କୋନ୍‌ଟିର ଭୂମିର ବ୍ୟାସ = 6 ସେ.ମି.

$\therefore$ ଏହାର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r = 3 ସେ.ମି.ଏବଂ ଉଚ୍ଚତା h = 8 ସେ.ମି.

$\therefore$ କୋନ୍‌ଟିର ଆୟତନ $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times (3)^2 \times 8 = 24\pi$ ଘ.ସେ.ମି

ସିଲିଣ୍ଡର ଆକାର ବିଶିଷ୍ଟ ପାତ୍ରର ଭୂମିର ବ୍ୟାସ 8 ସେ.ମି. ।

$\therefore$ ପାତ୍ରର ଭୂମିର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $r_1 = 4$ ସେ.ମି.

ମନେକର ସିଲିଣ୍ଡରରେ ଥିବା ଜଳ ମଧ୍ୟରେ କୋନ୍‌ଟି ବୁଡ଼ିବା ପରେ ସେଥିରେ ଜଳସ୍ତର x ସେ.ମି. ଉପରକୁ ଉଠିଯିବ ।

$\therefore$ ବୃଦ୍ଧି ପାଉଥିବା ଜଳର ଆୟତନ $= \pi(4)^2.x = 16\pi x$ ଘ.ସେ.ମି.

କିନ୍ତୁ ବୃଦ୍ଧି ପାଇଥିବା ଜଳର ଆୟତନ = କୋନ୍‌ଟିର ଆୟତନ

$\therefore \pi(4^2)x = 24\pi \Rightarrow x = \frac{24}{16} = \frac{3}{2} = 1.5$. ସେ.ମି.

$\therefore$ ପାତ୍ରଟିରେ ଜଳସ୍ତର 1.5 ସେ.ମି. ଉପରକୁ ଉଠିବ । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 18 : ଗୋଟିଏ କୋନ୍‌ର ଆଧାରର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଏବଂ ଉଚ୍ଚତାର ଅନୁପାତ 3:4 । ଯଦି ଏହାର ଆୟତନ 301.44 ଘ.ସେ.ମି. ହୁଏ । ତେବେ ଏହାର ବକ୍ର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ($\pi \simeq 3.14$)

ସମାଧାନ : ମନେକର କୋନ୍‌ଟିର ଆଧାରର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r = 3x ସେ.ମି. ଏବଂ ଉଚ୍ଚତା h = 4x ସେ.ମି.

$\therefore$ ଏହାର ଆୟତନ $= \frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow \frac{1}{3} \times 3.14 \times (3x)^2 \times 4x$ ଘ.ସେ.ମି. $= 3.14 \times 12x^3$ ଘ.ସେ.ମି.

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ $3.14 \times 12x^3 = 301.44 \Rightarrow x^3 = \frac{301.44}{3.14 \times 12} = 8 \Rightarrow x^3 = 2^3 \Rightarrow x = 2$

କୋନ୍‌ର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ = 3x ସେ.ମି. = 3 x 2 = 6 ସେ.ମି.

ଏବଂ ଉଚ୍ଚତା = 4x ସେ.ମି. = 4 x 2 = 8 ସେ.ମି.

$\therefore$ କୋନ୍‌ର ବକ୍ର ଉଚ୍ଚତା, $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(6)^2 + (8)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$ ସେ.ମି. (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 19 : 7 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଓ 24 ସେ.ମି. ଉଚ୍ଚତା ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ଫମ୍ପା କୋନ୍ ଦସ୍ତାପାତରେ ପ୍ରସ୍ତୁତ କରିବାକୁ ହେବ । ଆଧାର ସହିତ କୋନ୍‌ଟିକୁ ପ୍ରସ୍ତୁତ କରିବା ପାଇଁ ଆବଶ୍ୟକ ଦସ୍ତାପାତର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ଏହାର ଆୟତନ ମଧ୍ୟ ସ୍ଥିର କର । ($\pi \simeq \frac{22}{7}$)

ସମାଧାନ : ଫମ୍ପା କୋନ୍‌ର ଆଧାରର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ, r = 7 ସେ.ମି. ଏବଂ ଉଚ୍ଚତା, h = 24 ସେ.ମି.

$\therefore$ ଏହାର ବକ୍ର ଉଚ୍ଚତା $l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{24^2 + 7^2} = \sqrt{576 + 49} = \sqrt{625}$

= 25 ସେ.ମି.

ଆଧାର ସହିତ ଦସ୍ତାପାତର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ= ଆଧାରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ + ବକ୍ରତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ= $\pi r^2 + \pi r l = \pi r (r + l)$

$= \frac{22}{7} \times 7\,(7+25)$ ସେ.ମି. $= 22 \times 32 = 704$ ବ.ସେ.ମି.

ଆୟତନ = $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 24 = 1232$ ଘ.ସେ.ମି. (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 20. ଗୋଟିଏ କୋନ୍‌ର ଆୟତନ $314\frac{2}{7}$ ଘ.ସେ.ମି. ଏବଂ ଉଚ୍ଚତା ଓ ବକ୍ର ଉଚ୍ଚତାର ଅନୁପାତ 12:13 । ଏହାର ବକ୍ରପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । $(\pi \simeq \frac{22}{7})$

ସମାଧାନ : ମନେକର କୋନ୍‌ର ଆଧାରର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ = r ସେ.ମି., ଉଚ୍ଚତା = h ସେ.ମି. ଓ ବକ୍ରଉଚ୍ଚତା = l ସେ.ମି.

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ $\frac{h}{l} = \frac{12}{13}$ $\therefore h = 12x$ ସେ.ମି. ହେଲେ, $l = 13x$ ସେ.ମି.

$r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{(13x)^2 - (12x)^2} = \sqrt{169x^2 - 144x^2} = \sqrt{25x^2} = 5x$ ସେ.ମି.

ଏହାର ଆୟତନ = $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (5x)^2 \times 12x = \frac{22}{7} . 100x^3$ ଘନ ସେ.ମି.

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ $\frac{22}{7} . 100x^3 = 314\frac{2}{7} = \frac{2200}{7} \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$

$\therefore r = 5x$ ସେ.ମି. $= 5 \times 1 = 5$ ସେ.ମି. ଓ $l = 13x$ ସେ.ମି. = 13 ସେ.ମି.

$\therefore$ ବକ୍ରପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\pi r l = \frac{22}{7} \times 5 \times 13 = \frac{1430}{7} = 204\frac{2}{7}$ ବ.ସେ.ମି. (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ 5(e)

1. ନିମ୍ନରେ କୋନ୍ ଆକୃତିର କେତେକ ଟୋପିର ଉଚ୍ଚତା h ଓ ବକ୍ର ଉଚ୍ଚତା l ଦତ୍ତ ଅଛି । ପ୍ରତି ଟୋପିରେ ଲାଗିଥିବା କପଡ଼ାର ପରିମାଣ ଏବଂ ତା'ର ଭୂମିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । $(\pi \simeq \frac{22}{7})$

   (i) h = 3.5 ସେ.ମି., l = 9.1 ସେ.ମି., (ii) h = 5.6 ସେ.ମି., l = 11.9 ସେ.ମି.,

   (iii) h = 3.5 ସେ.ମି., l = 12.5 ସେ.ମି.

2. ନିମ୍ନରେ କୋନ୍ ଆକୃତିର ତିନୋଟି ତମ୍ବୁର ବକ୍ର ଉଚ୍ଚତା l ଓ ଭୂମିର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r ଦତ୍ତ ଅଛି । ପ୍ରତି ତମ୍ବୁର ଭିତରର ଆୟତନ ଓ ତମ୍ବୁରେ ଲାଗିଥିବା କପଡ଼ାର ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । $(\pi \simeq \frac{22}{7})$

   (i) r = 10 .5 ମି. l = 14.5 ମି. (ii) h = 24 ମି. l = 25 ମି.

3.(i) ଗୋଟିଏ କୋନ୍‌ର ଆୟତନ 12936 ଘନ ମିଟର । ଏହାର ଉଚ୍ଚତା 28 ମିଟର ହେଲେ ଭୂମିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଓ ବକ୍ରତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । $(\pi \simeq \frac{22}{7})$

(ii) ଗୋଟିଏ କୋନ୍‌ର ଆୟତନ 9240 ଘନ ଏକକ । ଏହାର ଭୂମିର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 21 ଏକକ ହେଲେ କୋନ୍‌ର ବକ୍ରତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । $(\pi \simeq \frac{22}{7})$

4.(i) ଗୋଟିଏ କୋନ୍‌ର ବକ୍ରତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 550 ବର୍ଗ ସେ.ମି. ଏବଂ ଭୂମିର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 7 ସେ.ମି. ହେଲେ କୋନ୍‌ଟିର ଆୟତନ ଏବଂ ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ($\pi \simeq \frac{22}{7}$)

(ii) ଗୋଟିଏ କୋନ୍‌ର ବକ୍ରତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 4070 ବର୍ଗ ସେ.ମି. ଏବଂ ବକ୍ର ଉଚ୍ଚତା 37 ସେ.ମି. ହେଲେ ତାହାର ଭୂମିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଓ ଆୟତନ ନିରୂପଣ କର । ($\pi \simeq \frac{22}{7}$)

5. ଯେଉଁ କୋନ୍‌ର ସମଗ୍ରପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 2816 ବର୍ଗ ସେ.ମି. ଓ ଭୂମିର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 14 ସେ.ମି. ତାହାର ଆୟତନ ଓ ବକ୍ରପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସ୍ଥିର କର । ($\pi \simeq \frac{22}{7}$)

6. ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 1386 ବର୍ଗ ସେ.ମି. ଏବଂ ବକ୍ରତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 770 ବର୍ଗ ସେ.ମି. ହୋଇଥିବା କୋନ୍‌ଟିର ଆୟତନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ($\pi \simeq \frac{22}{7}$)

7. (i) ଆୟତନ 12936 ଘନସେ.ମି. ଏବଂ $r : h = 3:4$ ହୋଇଥିବା ଏକ କୋନ୍‌ର ବକ୍ରତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସ୍ଥିର କର ।($\pi \simeq \frac{22}{7}$)

(ii) ଆୟତନ 17248 ଘନ ମିଟର ଏବଂ $r : l = 4:5$ ଥିବା ଗୋଟିଏ କୋନ୍‌ର ବକ୍ରତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ($\pi \simeq \frac{22}{7}$)

8.(i) ଦୁଇଟି କୋନ୍‌ର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଅନୁପାତ 3:5 ଓ ଉଚ୍ଚତାର ଅନୁପାତ 1:3 ହେଲେ ସେ ଦୁଇଟିର ଆୟତନର ଅନୁପାତ ସ୍ଥିର କର ।

(ii) ଦୁଇଟି କୋନ୍‌ର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଅନୁପାତ 2:7 ଓ ବକ୍ରଉଚ୍ଚତାର ଅନୁପାତ 3:8 ହେଲେ ଉକ୍ତ କୋନ୍‌ଦ୍ୱୟର ବକ୍ରତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଅନୁପାତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iii) ଦୁଇଟି କୋନ୍‌ର ଭୂମିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଅନୁପାତ 1:9 ଏବଂ ବକ୍ରତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଅନୁପାତ 5:21 ହେଲେ ସେ ଦୁଇଟିର ବକ୍ରଉଚ୍ଚତାର ଅନୁପାତ ସ୍ଥିର କର ।

9. (i) ଏକ କୋନ୍‌ର ଉଚ୍ଚତା ଏହାର ବକ୍ରଉଚ୍ଚତାର ଅଧା । କୋନ୍‌ଟିର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $5\sqrt{3}$ ସେ.ମି. ହେଲେ ଏହାର ଘନଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । (($\pi = 3.14$)

(ii) ଏକ କୋନ୍‌ର ଉଚ୍ଚତା ଏହାର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧର ଅଧା । କୋନ୍‌ଟିର ବକ୍ରଉଚ୍ଚତା 50 ସେ.ମି. ହେଲେ, ଏହାର ଘନଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ($\pi = 3.14$)

(iii) ଏକ କୋନ୍‌ର ଉଚ୍ଚତା ଓ ଏହାର ଭୂମିର ବ୍ୟାସର ଅନୁପାତ 2:3 ଏବଂ ଏହାର ବକ୍ରଉଚ୍ଚତା 20 ସେ.ମି. ହେଲେ, ଏହାର ଘନଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ($\pi = \sqrt{10}$)

10. ଏକ ସମଘନାକାର କାଠଖଣ୍ଡର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 21 ସେ.ମି. । ଏଥିରୁ କଟା ଯାଇ ମିଳିଥିବା ବୃହତ୍ତମ ଆୟତନ ବିଶିଷ୍ଟ କୋନ୍‌ର ଘନଫଳ ଓ ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ($\pi \simeq \frac{22}{7}$)

11. ବୃତ୍ତକଳା ଆକୃତିର ଗୋଟିଏ ଟିଣପତ୍ରକୁ ମୋଡ଼ି ତା'ର ଦୁଇ ପାଖର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧକୁ ଯୋଡ଼ି ଝଳାଇ କରି କୋନ୍ ଆକାର ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ପାତ୍ର ପ୍ରସ୍ତୁତ କରାଗଲା । ଟିଣପତ୍ରଟିର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 12 ସେ.ମି. ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ କୋଣ ପରିମାଣ 120^0 ହେଲେ ପ୍ରସ୍ତୁତ ପାତ୍ରଟିରେ କେତେ ପାଣି ରହି ପାରିବ ? ($\pi \simeq \frac{22}{7}$)

12. ଗୋଟିଏ ନିଦା କୋନ୍‌ର ଭୂମିର ବ୍ୟାସ 6 ସେ.ମି. ଓ ଉଚ୍ଚତା 8 ସେ.ମି. । ଏହାକୁ ଆଂଶିକ ଜଳପୂର୍ଣ୍ଣ ଏକ ସିଲିଣ୍ଡର ଆକାରର ପାତ୍ର ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ରୂପେ ବୁଡ଼ାଇ ଦିଆଗଲା । ସିଲିଣ୍ଡରର ଭିତରର ବ୍ୟାସ 8 ସେ.ମି. ହେଲେ ସେଥିରେ ଥିବାଜଳସ୍ତର କେତେ ବୃଦ୍ଧି ପାଇବ ?

13. ଗୋଟିଏ ତମ୍ବୁର ନିମ୍ନ ଅଂଶ ସିଲିଣ୍ଡର ଆକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ଯାହାର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 35 ମି. ଓ ଉଚ୍ଚତା 8 ମି. ଏବଂ ଉର୍ଦ୍ଧାଂଶ 35 ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଏବଂ 12 ମି. ଉଚ୍ଚତା ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ କୋନ୍ ଆକାରର । ତମ୍ବୁଟିକୁ ପ୍ରସ୍ତୁତ କରିବା ପାଇଁ କେତେ ବର୍ଗମିଟର କପଡ଼ା ଲାଗିଥିବ ସ୍ଥିର କର । ($\pi \simeq \frac{22}{7}$)

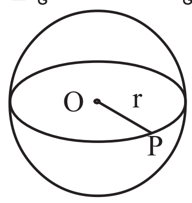
14. ଏକ ତମ୍ବୁର ନିମ୍ନ ଅଂଶ 30 ମି. ଉଚ୍ଚତା ବିଶିଷ୍ଟ ସରଳ ବୃତ୍ତ ଭୂମିକ ସିଲିଣ୍ଡର ଓ ଉପର ଅଂଶ କୋନ୍ ଆକାର ବିଶିଷ୍ଟ । ଏହାର ଭୂମିର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 21 ମି. ଏବଂ ଭୂପୃଷ୍ଠରୁ ତମ୍ବୁଶୀର୍ଷର ଉଚ୍ଚତା 58 ମି. ହେଲେ ତମ୍ବୁରେ ବ୍ୟବହୃତ କ୍ୟାନ୍‌ଭାସ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ($\pi \simeq \frac{22}{7}$)

15. ଗୋଟିଏ ଜଳ ପୂର୍ଣ୍ଣ କୋନ୍ ଆକାର ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ପାତ୍ରର ଉପର ବୃତ୍ତାକାର ଧାରର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 2.5 ସେ.ମି. ଏବଂ ଗଭୀରତା 11 ସେ.ମି. । 0.25 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ କେତେଗୋଟି ସୀସା ଗୋଲି ଏହା ମଧ୍ୟକୁ ପକାଇଲେ ଏଥିରେ ଥିବା ଜଳର $\frac{2}{5}$ ଅଂଶ ବାହାରକୁ ଅପସାରିତ ହୋଇଯିବ, ସ୍ଥିର କର ।

16. ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ସମକୋଣ ସଂଲଗ୍ନ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 12 ସେ.ମି. ଓ 5 ସେ.ମି. । ଏହାର ବୃହତ୍ତମ ବାହୁକୁ ସ୍ଥିର ରଖି, ତା'ର ଚାରିପାଖରେ ତ୍ରିଭୁଜଟିକୁ ଘୂରାଇଲେ ଯେଉଁ ଘନବସ୍ତୁ ହେବ, ତା'ର ଘନଫଳ ଏବଂ ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 'π' ମାଧ୍ୟମରେ ସ୍ଥିର କର ।

5.10. ଗୋଲକ (Sphere) :

ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ନଥିବା, କେତେକ ଜ୍ୟାମିତିକ ଆକାର ଓ ବସ୍ତୁ ମଧ୍ୟରୁ ପ୍ରିଜିମ୍ ଓ ସିଲିଣ୍ଡର ସମ୍ବନ୍ଧରେ ପୂର୍ବରୁ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି । **ଗୋଲକ** ମଧ୍ୟ ଏକ ଜ୍ୟାମିତିକ ବସ୍ତୁ ଅଟେ । ପେଣ୍ଡୁ ବା ଗୋଲି ପ୍ରଭୃତି ଗୋଲକାକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ବସ୍ତୁର ଉଦାହରଣ ।



(ଚିତ୍ର 5.28)

ସଂଜ୍ଞା – ଗୋଟିଏ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁ 'O' ଠାରୁ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦୂରତା 'r' ରେ ଅବସ୍ଥିତ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ସେଟ୍‌କୁ ଏକ ଗୋଲକ କୁହାଯାଏ । 'O' ଏବଂ 'r' କୁ ଯଥାକ୍ରମେ ଗୋଲକର କେନ୍ଦ୍ର ଓ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ କୁହାଯାଏ । 'O' ଏବଂ ଗୋଲକର ଏକ ବିନ୍ଦୁ P କୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡ $\overline{OP}$ କୁ ଗୋଲକର **ଏକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ** କୁହାଯାଏ ।

ଗୋଲକର ଦୁଇ ବିନ୍ଦୁକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ଏକ ଜ୍ୟା ଓ କେନ୍ଦ୍ରବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଏକ ଜ୍ୟାକୁ ଗୋଲକର ଏକ **ବ୍ୟାସ** କୁହାଯାଏ । ଏକ ବ୍ୟାସର ଦୈର୍ଘ୍ୟ (2r) କୁ ଗୋଲକର ବ୍ୟାସ କୁହାଯାଏ ।

(A) ନିଦା ଗୋଲକ (Solid Sphere)

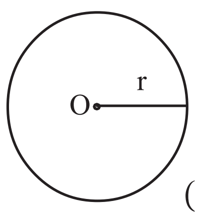
ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ P' ଏବଂ O ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତା 'r' ଠାରୁ କମ୍ ହେଲେ P' କୁ ଗୋଲକର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ କହନ୍ତି ଓ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଗଠିତ ସେଟ୍ କୁ **ଗୋଲକର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ** କୁହାଯାଏ । ଗୋଲକ ଓ ଏହାର ଅନ୍ତର୍ଦେଶର ସଂଯୋଗ ଦ୍ୱାରା ଗଠିତ ସେଟ୍‌କୁ ଏକ **ନିଦା ଗୋଲକ (Solid Sphere)** କହନ୍ତି । ନିଦା ଗୋଲକ ପରିବର୍ତ୍ତେ କେବଳ 'ଗୋଲକ' ଶବ୍ଦର ବ୍ୟାବହାର ଅନେକ ସମୟରେ କରାଯାଇଥାଏ ।

ଲକ୍ଷ୍ୟକର ଯେ, ଗୋଲକର ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ବକ୍ରପୃଷ୍ଠତଳ ଅଛି ।

(i) ଏହାର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 'r' ଏକକ ହେଲେ :

ଗୋଲକର | ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $4\pi r^2$ ବର୍ଗ ଏକକ । |

(ii) | ଘନଫଳ = $\frac{4}{3}\pi r^3$ ଘନ ଏକକ । |



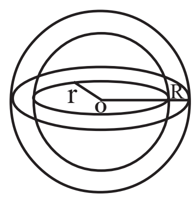
(ଚିତ୍ର 5.29)

(B) ଫମ୍ପା ଗୋଲକ (Hollow Sphere) :

ଦୁଇଟି ଗୋଲକ ଏକକେନ୍ଦ୍ରିକ ହେଲେ ଏମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଅଂଶ ଓ ଗୋଲକଦ୍ୱୟକୁ ନେଇ ଏକ ଫମ୍ପା ଗୋଲକ (Hollow Sphere) ର ସୃଷ୍ଟି ।

ଫମ୍ପା ଗୋଲକର ଦୁଇଟି ପୃଷ୍ଠତଳ ଥାଏ । ବାହାରକୁ ଦୃଶ୍ୟମାନ ପୃଷ୍ଠତଳଟିକୁ **ବାହ୍ୟପୃଷ୍ଠତଳ (Outer Surface)** ଏବଂ ଭିତରକୁ ଥିବା ପୃଷ୍ଠତଳକୁ **ଅନ୍ତଃପୃଷ୍ଠତଳ (Inner Surface)** କହନ୍ତି । ବାହ୍ୟପୃଷ୍ଠତଳର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧକୁ **ବହିଃବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ** ଏବଂ ଅନ୍ତଃ ପୃଷ୍ଠତଳର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧକୁ **ଅନ୍ତଃବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ** କୁହାଯାଏ ।

ବହିଃବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ R ଏକକ ଓ ଅନ୍ତଃବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r ଏକକ ହେଲେ



(ଚିତ୍ର 5.30)

(i) ବହିଃପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $4\pi R^2$ ବର୍ଗ ଏକକ ଏବଂ

(ii) ଅନ୍ତଃପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $4\pi r^2$ ବର୍ଗ ଏକକ ହେବ ।

(iii) ଗୋଲକର ସମଗ୍ରପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $4\pi (R^2 + r^2)$ ବର୍ଗ ଏକକ

(iv) ଘନଫଳ ବା ଆୟତନ $= \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$

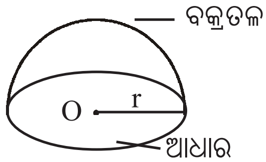
$= \frac{4}{3}\pi (R^3 - r^3)$ **ଘନ ଏକକ**

(C) ଅର୍ଦ୍ଧ ଗୋଲକ (Hemisphere) :

ନିଦା ଗୋଲକର କେନ୍ଦ୍ର ମଧ୍ୟଦେଇ ଅଙ୍କିତ ସମତଳ ଉକ୍ତ ନିଦା ଗୋଲକକୁ ଏକ ବୃତ୍ତାକାର କ୍ଷେତ୍ରରେ ଛେଦକରେ । ଏହି ବୃତ୍ତାକାର କ୍ଷେତ୍ର ଓ ସମତଳର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିବା ନିଦା ଗୋଲକର ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସଂଯୋଗରେ ଗଠିତ ସେଟ୍‌କୁ ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧଗୋଲକ (Hemi Sphere) କୁହାଯାଏ । ଏକ ଗୋଲକ କେନ୍ଦ୍ର ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଗୋଟିଏ ସମତଳ ଦ୍ୱାରା ଦୁଇଟି ଅର୍ଦ୍ଧ ଗୋଲକରେ ପରିଣତ ହୁଏ ।

ଅର୍ଦ୍ଧ ଗୋଲକର ଦୁଇଟି ପୃଷ୍ଠତଳ ଥାଏ; ଯଥା : (i) ବକ୍ରତଳ (ii) ବୃତ୍ତାକାର ତଳ ବା ଆଧାର

ଅର୍ଦ୍ଧ ଗୋଲକର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r ଏକକ ହେଲେ



(ଚିତ୍ର 5.31)

(i) ବକ୍ରତଳ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $2\pi r^2$ ବର୍ଗ ଏକକ

(ii) ଆଧାର ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = πr^2 ବର୍ଗ ଏକକ

(iii) ସମଗ୍ରପୃଷ୍ଠତଳ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $3\pi r^2$ ବର୍ଗ ଏକକ

(iv) ଅର୍ଦ୍ଧ ଗୋଲକର ଘନଫଳ = $\frac{2}{3}\pi r^3$ **ଘନ ଏକକ**

ସମାହିତ ପ୍ରଶ୍ନାବଳୀ

ଉଦାହରଣ - 21 : ଗୋଟିଏ ଗୋଲକର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 3.5 ମି. ହେଲେ ତା'ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଓ ଘନଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ($\pi \simeq \frac{22}{7}$)

ସମାଧାନ : ଗୋଲାକଟିର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $r = 3.5$ ମି.

$\therefore$ ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= 4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times (3.5)^2 = 154$ ବ.ମି.

ଏବଂ ଘନଫଳ $= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (3.5)^2 = 179\frac{2}{3}$ ଘ.ମି. (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 22 : 14 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧଗୋଲକର ଆୟତନ ଓ ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ($\pi \simeq \frac{22}{7}$)

ସମାଧାନ : ଅର୍ଦ୍ଧଗୋଲକର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $r = 14$ ସେ.ମି.

$\therefore$ ଆୟତନ $= \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times (14)^3 = \frac{17248}{3} = 5749\frac{1}{3}$ ଘ.ସେ.ମି.

ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= 3\pi r^2 = 3 \times \frac{22}{7} \times 14^2$ ବ.ସେ.ମି. $= 1848$ ବ.ସେ.ମି. (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 23 : ଗୋଟିଏ ଗୋଲକର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 5544 ବ.ସେ.ମି. ହେଲେ, ତା'ର ଆୟତନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ($\pi \simeq \frac{22}{7}$)

ସମାଧାନ : ମନେକର ଗୋଲକର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ = r ସେ.ମି.

$\therefore$ ଏହାର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $4\pi r^2$ ବ.ସେ.ମି.

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ $4\pi r^2 = 5544 \Rightarrow 4 \times \frac{22}{7} \times r^2 = 5544 \Rightarrow r^2 = \frac{5544 \times 7}{4 \times 22} = 441 \Rightarrow r = \sqrt{441} = 21$ ସେ.ମି.

$\therefore$ ଗୋଲକର ଆୟତନ $= \frac{4}{3}\pi r^3$ ଘ.ମି. $= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (21)^3$

$.= 88 \times 441$ ଘ.ସେ.ମି. $= 38,808$ ଘ.ସେ.ମି. (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ 24 : 7 ସେ.ମି. ଦୀର୍ଘ ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ସମଘନାକାର କାଠଖଣ୍ଡକୁ କାଟି ବୃହତ୍ତମ ଏକ ଗୋଲକରେ ପରିଣତ କରାଗଲା । ଗୋଲକର ଘନଫଳ ସ୍ଥିର କର । ($\pi \simeq 3.14$)

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ସମଘନର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, $a = 7$ ସେ.ମି. ସେଥିରୁ କଟାଯାଇ ପାରୁଥିବା ବୃହତ୍ତମ ଗୋଲକର ବ୍ୟାସ = ସମଘନର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 7 ସେ.ମି.

$\therefore$ ଗୋଲକର ବ୍ୟସାର୍ଦ୍ଧ, $r = \frac{7}{2}$ ସେ.ମି.

$\therefore$ ଗୋଲକର ଘନଫଳ $= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times 3.14 \times \left(\frac{7}{2}\right)^3 = \frac{538.51}{3} = 179.5$ ଘ.ସେ.ମି. (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 25 : ସିଲିଣ୍ଡର ଆକୃତିର ଏକ ଜଳପାତ୍ରର ଭୂମିର ବ୍ୟାସ 10 ସେ.ମି. । ଏଥିରେ ଥିବା ଜଳରେ ସମାନ ଆକାରର 300 ଟି ଛୋଟ ଲୁହା ଗୋଲି ବୁଡ଼ାଇ ଦେବାରୁ ଜଳସ୍ତର 2 ସେ.ମି. ଉପରକୁ ଉଠିଗଲା । ପ୍ରତିଟି ଗୋଲିର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ପ୍ରତି ଗୋଲିର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ = r ସେ.ମି.

$\therefore$ ଆୟତନ = $\frac{4}{3}\pi r^3$ ଘ.ସେ.ମି.

ସେହିଭଳି 300 ଟି ଛୋଟି ଲୁହା ଗୋଲିର ଆୟତନ = $\frac{4}{3}\pi r^3 \times 300$ ଘ.ସେ.ମି.

300 ଟି ଗୋଲି ବୁଡ଼ିଯିବାରୁ ସିଲିଣ୍ଡର ଆକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ଜଳ ପାତ୍ରରେ ଜଳସ୍ତର 2 ସେ.ମି. ଉପରକୁ ଉଠିଲା ।

ବୃଦ୍ଧି ପାଇ ଥିବା ଜଳର ଆୟତନ = $\pi . 5^2 . 2$ ଘ.ସେ.ମି. (ସିଲିଣ୍ଡରର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $\frac{10}{2} = 5$ ସେ.ମି.)

$\therefore \frac{4}{3}\pi r^3 \times 300 = \pi \times 5^2 \times 2 \Rightarrow 400\pi r^3 = \pi \times 50$

$r^3 = \frac{50}{400} = \frac{1}{8} \Rightarrow r = \frac{1}{2} = 0.5$ ସେ.ମି.

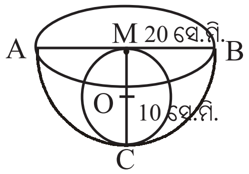
$\therefore$ ପ୍ରତି ଗୋଲିର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 0.5 ସେ.ମି. (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 26 : 20 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଅର୍ଦ୍ଧ ଗୋଲକ ଆକୃତିର ଏକ କାଠଖଣ୍ଡରୁ ବୃହତ୍ତମ ଗୋଲକଟିଏ କାଟି ନିଆଗଲେ ଅବଶିଷ୍ଟ କାଠର ଘନଫଳ ସ୍ଥିର କର । ($\pi \simeq 3.14$)

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଅର୍ଦ୍ଧ ଗୋଲକ ଆକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ କାଠ ଖଣ୍ଡର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ MB = 20 ସେ.ମି.

$\therefore$ ସେଥିରୁ କଟାଯାଇଥିବା ବୃହତ୍ତମ ଗୋଲକଟିର ବ୍ୟାସ MC = 20 ସେ.ମି.

ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ, OC = 10 ସେ.ମି.



(ଚିତ୍ର 5.31)

$\therefore$ ଘନଫଳ $= \frac{4}{3}\pi(OC)^3 = \frac{4}{3}\pi(10)^3$ ଘ.ସେ.ମି.

ଅର୍ଦ୍ଧ ଗୋଲକ ଆକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ କାଠ ଖଣ୍ଡର ଘନଫଳ = $\frac{2}{3}\pi(MB)^3 = \frac{2}{3}\pi(20)^3$ ଘ.ସେ.ମି.

ଅର୍ଦ୍ଧ ଗୋଲକ ଆକୃତିର ଏକ କାଠଖଣ୍ଡରୁ ବୃହତ୍ତମ ଗୋଲକଟିଏ କାଟି ନିଆଗଲେ ଅବଶିଷ୍ଟ କାଠର ଘନଫଳ

= ଅର୍ଦ୍ଧ ଗୋଲକର ଘନଫଳ - କାଟି ନିଆଯାଇଥିବା ଗୋଲକର ଘନଫଳ

$= \frac{2}{3}\pi(20)^3 - \frac{4}{3}\pi(10)^3 = \frac{2}{3}\pi\{(20)^3 - 2\times(10)^3\}$

$= \frac{2}{3}\pi(8000 - 2000) = \frac{2}{3} \times 3.14 \times 6000$ ଘ.ସେ.ମି.

$= 4000 \times 3.14 = 12560$ ଘ.ସେ.ମି. (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5(f)

1. ନିମ୍ନରେ କେତେକ ଗୋଲକର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r କିମ୍ବା ବ୍ୟାସ d ଦତ୍ତ ଅଛି । ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଗୋଲକର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଓ ଆୟତନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ($\pi \simeq \frac{22}{7}$)

   (i) r = 21 ସେ.ମି. (ii) d = 14 ସେ.ମି. (iii) r = 10 .5 ସେ.ମି.

2. ନିମ୍ନରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ତିନୋଟି ଲେଖାଏଁ ଧାତବ ଗୋଲକର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଦତ୍ତ ଅଛି । ସେଗୁଡ଼ିକୁ ତରଳାଇ ଗୋଟିଏ ଗୋଲକରେ ପରିଣତ କଲେ, ପ୍ରତ୍ୟେକ ସ୍ଥଳେ ନୂତନ ଗୋଲକର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ କେତେ ହେବ ? ($\pi \simeq \frac{22}{7}$)

   (i) 3 ସେ.ମି., 4 ସେ.ମି., 5 ସେ.ମି. (ii) 8 ସେ.ମି., 6 ସେ.ମି., 1 ସେ.ମି.

   (iii) 17 ସେ.ମି., 14 ସେ.ମି., 7 ସେ.ମି.

3. ନିମ୍ନ ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଦୁଇଟି ଲେଖାଏଁ ଗୋଲକର ବ୍ୟାସର ଅନୁପାତ ବା ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧର ଅନୁପାତ ଦତ୍ତ ଅଛି । ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ର ଗୋଲକ ଦ୍ୱୟର ଆୟତନର ଅନୁପାତ ଏବଂ ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଅନୁପାତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   (i) $\frac{d_1}{d_2} = \frac{3}{4}$ (ii) $\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{3}$ (iii) $\frac{r_1}{r_2} = \frac{2}{5}$

4. ଗୋଟିଏ ଗୋଲକର ଆୟତନ $\frac{792}{7}$ ଘ.ସେ.ମି.ହେଲେ ତା'ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।($\pi \simeq \frac{22}{7}$)

5. (i) ଗୋଟିଏ ଗୋଲକର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 616 ବ.ସେ.ମି. ହେଲେ ତା'ର ଆୟତନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।($\pi \simeq \frac{22}{7}$)

   (ii) ଗୋଟିଏ ଗୋଲକର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 5544 ବ.ସେ.ମି. ହେଲେ ତା'ର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ କେତେ ?($\pi \simeq \frac{22}{7}$)

6. ଗୋଟିଏ ଗୋଲକର ଘନଫଳ 19404 ଘ.ମି. । ଏହାର ସମଘନଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧଗୋଲକର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ କେତେ ?($\pi \simeq \frac{22}{7}$)

7. 9 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ଧାତବ ଗୋଲକକୁ ତରଳାଇ ସେଥିରୁ

   (i) 1 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ କେତୋଟି କ୍ଷୁଦ୍ର ଗୋଲକ ପ୍ରସ୍ତୁତ କରାଯାଇ ପାରିବ ? ($\pi \simeq \frac{22}{7}$)

   (ii) 1 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସ ବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତାକାର ପ୍ରସ୍ଥ ଛେଦଥାଇ କେତେ ଲମ୍ବର ତାର ପ୍ରସ୍ତୁତ କରାଯାଇ ପାରିବ ? ($\pi \simeq \frac{22}{7}$)

8. ଗୋଟିଏ ଅର୍ଦ୍ଧଗୋଲକାକୃତି ପାଣିଟାଙ୍କିର ଭିତର ପାଖର ବ୍ୟାସ 4.2 ମିଟର ହେଲେ, ସେଥିରେ କେତେ ଲିଟର ପାଣି ଧରିବ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ($\pi \simeq \frac{22}{7}$)

9. ସମାନ ଭୂମି ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ଅର୍ଦ୍ଧଗୋଲକ, ଗୋଟିଏ ସିଲିଣ୍ଡର ଓ ଗୋଟିଏ କୋନ୍‌ର ଆୟତନ ସମାନ ହେଲେ, ସେମାନଙ୍କର ଉଚ୍ଚତାର ଅନୁପାତ ସ୍ଥିର କର ।

10. ଗୋଟିଏ ଫମ୍ପା ଧାତବ ଗୋଲକର ଅନ୍ତଃବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 3 ସେ.ମି. ଓ ବହିଃବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 6 ସେ.ମି. । ପ୍ରତି ଘନସେ.ମି. ଧାତୁର ବସ୍ତୁତ୍ୱ 8 ଗ୍ରାମ ହେଲେ ତା'ର ବସ୍ତୁତ୍ୱ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ($\pi \simeq \frac{22}{7}$)

11. ଗୋଟିଏ ଅର୍ଦ୍ଧ ଗୋଲକ ଆକୃତିର ପାତ୍ରର ବାହାର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 8 ସେ.ମି. ଓ ମୋଟେଇ 1 ସେ.ମି. । ଏହାର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ କେତେ ? ($\pi \simeq \sqrt{10}$)

12. ଗୋଟିଏ ନିଦା ସୀସା ସମଘନରୁ ଏକ ବୃହତ୍ତମ ଆକାର ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଲକ କାଟି ନିଆଗଲା । ଅବଶିଷ୍ଟ ଅଂଶର ଆୟତନ 12870 ଘ.ସେ.ମି. ହେଲେ, ସମଘନର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କେତେ ? ($\pi \simeq 3.14$)

13. ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧ ଗୋଲକାକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ପାତ୍ରର ମୋଟେଇ ଓ ବାହାରର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଯଥାକ୍ରମେ 1 ସେ.ମି. ଓ 10 ସେ.ମି. ହେଲେ, (i)ଏହାର ସମଗ୍ରପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଏବଂ (ii) ଏଥିରେ ବ୍ୟବହୃତ ଧାତୁର ଆୟତନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

    (π ମାଧ୍ୟମରେ ଉତ୍ତର ସ୍ଥିର କର)

ଷଷ୍ଠ ଅଧ୍ୟାୟ

ଅଙ୍କନ
(CONSTRUCTION)

6.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ନବମ ଶ୍ରେଣୀରେ ତ୍ରିଭୁଜ ଓ ଚତୁର୍ଭୁଜ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଅଙ୍କନ ପ୍ରାୟତଃ ବିସ୍ତୃତ ଭାବରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି । କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଉପପାଦ୍ୟକୁ ପ୍ରୟୋଗ କରି ତ୍ରିଭୁଜର ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ, ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ଓ ଆୟତ ଚିତ୍ର ଇତ୍ୟାଦି ଅଙ୍କନ କରାଯାଇଛି । ତତ୍‌ସହିତ ଚତୁର୍ଭୁଜର ସମକ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ ଓ ଶେଷ ଭାଗରେ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ୟାନ୍ୟ କେତେକ ଜଟିଳ ଅଙ୍କନ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ମଧ୍ୟ ଆଲୋଚନା ହୋଇଛି ।

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ତ୍ରିଭୁଜର ପରିବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ; ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଓ ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ସ୍ପର୍ଶକ ଅଙ୍କନ; ବୃତ୍ତରେ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ, ବର୍ଗଚିତ୍ର, ସୁଷମ ଷଡ଼ଭୁଜ ଅନ୍ତର୍ଲିଖନ ଓ ପରିଲିଖନ; ବର୍ଗଚିତ୍ରର ଅନ୍ତଃବୃତ୍ତ ଓ ପରିବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ ଇତ୍ୟାଦି ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା । ଏତତ୍‌ବ୍ୟତୀତ ଏକ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଅନୁପାତରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭାଜନ ଓ ବହିର୍ବିଭାଜନ ଓ ଶେଷ ଭାଗରେ ବୃତ୍ତରେ ଦତ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜର ଏକ ସଦୃଶ ତ୍ରିଭୁଜ ଅନ୍ତର୍ଲିଖନ ଓ ପରିଲିଖନ ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

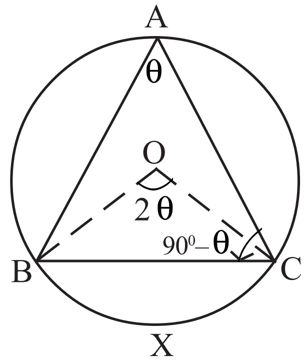
ଅଙ୍କନ ପାଇଁ ବିଶ୍ଳେଷଣ ଚିତ୍ରର ସାହାଯ୍ୟ ନିଆଯାଇଥାଏ । କାରଣ ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀର ସୋପାନଗୁଡ଼ିକ ସେଥିରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଜଣାପଡ଼ିଥାଏ । **(ପ୍ରକାଶ ଥାଉକି, ବିଶ୍ଳେଷଣ ତଥା ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀଗୁଡ଼ିକ ଲେଖିବା ଅନାବଶ୍ୟକ ।)**

6.2. ଅଙ୍କନ - 1 :

ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଏକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଏବଂ ଏହି ବାହୁର ବିପରୀତ କୋଣର ପରିମାଣ ଦତ୍ତଥିଲେ ତ୍ରିଭୁଜର ପରିବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ।

Drawing the circum-circle of a triangle of which the length of one side and the measure of the angle opposite to it are given.

ଏହି ପରିସ୍ଥିତିରେ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ ପାଇଁ ଦୁଇଗୋଟି ତଥ୍ୟ ଯଥା ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ବାହୁର ବିପରୀତ କୋଣ ପରିମାଣ ଦତ୍ତଥିବାରୁ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ ସମ୍ଭବପର ନୁହେଁ। କିନ୍ତୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ପରିବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ ସମ୍ଭବପର। ଏ ଦୁଇଟି ତଥ୍ୟ ବ୍ୟତୀତ ଅନ୍ୟ ଏକ ତଥ୍ୟ ଦତ୍ତ ଥିଲେ ଏହି ପରିବୃତ୍ତକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କରିହେବ।



[ଚିତ୍ର 6.1]

ବିଶ୍ଳେଷଣ : ΔABC ର $\overline{BC}$ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଏବଂ ଏହାର ସମ୍ମୁଖୀନ କୋଣ ପରିମାଣ $m\angle A = \theta^0$ $(\theta^0 < 90^0)$ ଦତ୍ତ ଅଛି।

ଏହି ତଥ୍ୟଦ୍ୱୟକୁ ଭିତ୍ତିକରି ଏକ ପରିବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ହେବ। ଅର୍ଥାତ୍ ପରିବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରର ଅବସ୍ଥିତି ଓ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ହେବ।

ମନେକର ΔABC ର ପରିବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ OB (ବା OC) ।

$m\angle A = \theta^0$ ହେଲେ, $m\angle BOC = 2\theta$ ହେବ ଅର୍ଥାତ୍ $\widehat{BXC}$ ର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ 2θ ହେବ।

($\because$ ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣର ପରିମାଣ ଏହି କୋଣ ଦ୍ୱାରା ଛେଦିତ ଚାପର ଡିଗ୍ରୀପରିମାପର ଅର୍ଦ୍ଧେକ ଅଟେ।)

$m\angle OBC = m\angle OCB = \dfrac{180 - 2\theta}{2} = (90^0 - \theta^0)$

ବର୍ତ୍ତମାନ ତୁମେ A–S–A ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀରେ ΔBOC ଅଙ୍କନ କରିପାରିବ।

ଫଳରେ କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ ପରିବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ OB କିମ୍ବା OC ନିର୍ଣ୍ଣିତ ହୋଇପାରିବ।

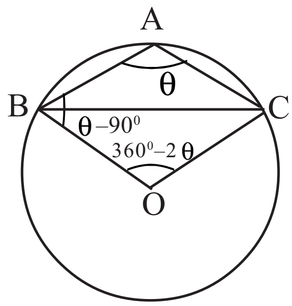
ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ :

(i) BC = a ଏକକ ଏବଂ $m\angle OBC = m\angle OCB = 90^0 - \theta$ ନେଇ ΔOBC ଅଙ୍କନ କର।

(ii) Oକୁ କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ OB (କିମ୍ବା OC) କୁ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କର।

ବି.ଦ୍ର : (a) $\theta = 90^0$ ହେଲେ BC ବ୍ୟାସ ହେବ। $\overline{BC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ OB କିମ୍ବା OC ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ହେବ।

(b) $\theta > 90^0$ ହେଲେ (ଚିତ୍ର 6.2) $\overline{BC}$ ର ଯେଉଁ ପାର୍ଶ୍ୱରେ A ବିନ୍ଦୁ ରହିଛି ତା'ର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ କେନ୍ଦ୍ର ଅବସ୍ଥାନ କରିବ।



[ଚିତ୍ର 6.2]

ଏହି ପରିସ୍ଥିତିରେ $m\angle CBO = m\angle BCO$ $= (\theta - 90^0)$ ଅଙ୍କନ କରି କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ OB କିମ୍ବା OC ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟକର $\widehat{BXC}$ ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ 2θ ହେଲେ,

$m\angle BOC = 360^0 - 2\theta$ ହେବ।

ଉଦାହରଣ - 1 :

ΔABC ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର BC = 7.5 ସେ.ମି., $m\angle A = 60^0$, AX ମଧ୍ୟମା = 4.5 ସେ.ମି.

ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ :

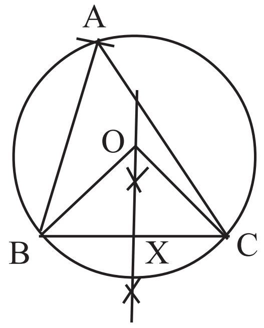
(i) BC ଏବଂ $\angle A$ ର ପରିମାଣକୁ ନେଇ ପରିବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କର ।

(ii) $\overline{BC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ X ଚିହ୍ନଟ କର ।

(iii) X କୁ କେନ୍ଦ୍ର କରି AX ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ପରିମିତ ଚାପ ଅଙ୍କନ କର ଯାହା ଅଙ୍କିତ ପରିବୃତ୍ତକୁ A ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ ।

(iv) $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ଅଙ୍କନ କର ।

(v) ABC ଆବଶ୍ୟକୀୟ ତ୍ରିଭୁଜ ।



[ଚିତ୍ର 6.3]

ଅନୁଶୀଳନୀ – 6(a)

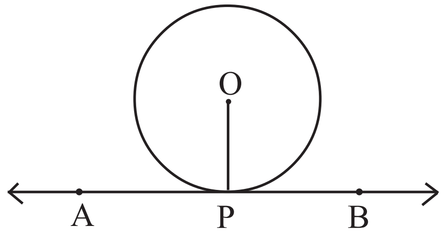
1. ΔABCରେ BC = 6 ସେ.ମି., $m\angle A = 45^0$, ତ୍ରିଭୁଜର ପରିବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କର ।
2. ΔABCରେ AC = 7 ସେ.ମି., $m\angle B = 60^0$, ତ୍ରିଭୁଜର ପରିବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କର ।
3. ΔABCରେ AB = 6.5 ସେ.ମି., $m\angle C = 90^0$, ତ୍ରିଭୁଜର ପରିବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କର ।
4. ΔABCରେ $m\angle A = 120^0$, BC = 4.5 ସେ.ମି. । ତ୍ରିଭୁଜର ପରିବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କର ।
5. ΔABCରେ BC = 7 ସେ.ମି., $m\angle A = 60$, AX ମଧ୍ୟମା = 4.5 ସେ.ମି., ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କର ।
6. ΔABCରେ $\angle B$ ସମକୋଣ । AC = 7 ସେ.ମି., B ବିନ୍ଦୁରୁ $\overline{AC}$ ପ୍ରତିଲମ୍ବ । $\overline{BD}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 3 ସେ.ମି. । ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କର । ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ $\overline{AC}$ ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ B ବିନ୍ଦୁର କେତେ ଗୋଟି ଅବସ୍ଥିତି ପାଇଲ ?
7. ΔABCରେ BC = 8 ସେ.ମି., $m\angle A = 45^0$, AD ଉଚ୍ଚତା 3 ସେ.ମି. ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କର ।
8. ΔABC ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର $m\angle B = 60^0$, AC = 6.5 ସେ.ମି. ଏବଂ $\overline{AX}$ ମଧ୍ୟମାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 5 ସେ.ମି.
9. ΔABCର $m\angle A = 60^0$, BC = 7 ସେ.ମି., $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ BE = 6.3 ସେ.ମି. Δଟି ଅଙ୍କନ କର ।
10. ΔABCର $m\angle A = 150^0$, BC = 5 ସେ.ମି., AD ଉଚ୍ଚତା = 3 ସେ.ମି. ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କର ।
11. ΔABCରେ $m\angle A = 60^0$, b:c = 2:3, BC = 7 ସେ.ମି. । ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କର ।
12. ABCD ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର AB = 5.5 ସେ.ମି., କର୍ଣ୍ଣ $\overline{BD}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 8 ସେ.ମି. ଓ $m\angle DAC = 60^0$ ।

6.3. ଅଙ୍କନ - 2 :

ଦତ୍ତବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁରେ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ସ୍ପର୍ଶକ ଅଙ୍କନ।

(Drawing a tangent to a given circle at a given point on it.)

ବିଶ୍ଳେଷଣ : O ଦତ୍ତ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର। P ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ। $\overline{OP}$ ଏକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ। ମନେକର ବୃତ୍ତର P ବିନ୍ଦୁରେ $\overleftrightarrow{AB}$ ସ୍ପର୍ଶକ ଅଟେ। (ଚିତ୍ର 6.4)



[ଚିତ୍ର 6.4]

$\therefore$ $m\angle OPA = m\angle OPB = 90^0$ ହେବ।

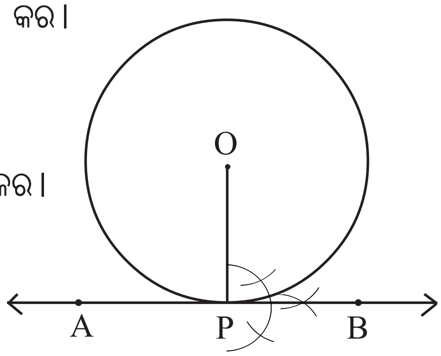
$\because$ ବୃତ୍ତର ସ୍ପର୍ଶକ ସ୍ପର୍ଶ ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଅଟେ।

ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ : (i) ବୃତ୍ତ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟନେଇ ବୃତ୍ତଟି ଅଙ୍କନ କର।

(ii) ବୃତ୍ତ ଉପରେ P ନାମକ ବିନ୍ଦୁ ଚିହ୍ନଟ କର।

(iii) $\overline{OP}$ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଅଙ୍କନ କର।

(iv) $\overline{OP}$ ପ୍ରତି P ବିନ୍ଦୁରେ ଲମ୍ବ $\overleftrightarrow{AB}$ ଅଙ୍କନ କର।

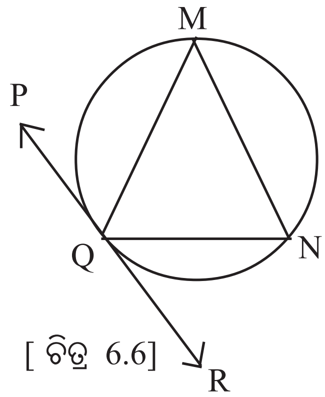


[ଚିତ୍ର 6.5]

ପ୍ରମାଣ : P ବିନ୍ଦୁରେ $\overline{OP}$ ପ୍ରତି $\overleftrightarrow{AB}$ ଲମ୍ବ ହେତୁ ବୃତ୍ତପ୍ରତ P ବିନ୍ଦୁରେ $\overleftrightarrow{AB}$ ସ୍ପର୍ଶକ । $\therefore$ $\overleftrightarrow{AB}$ ଆବଶ୍ୟକ ସ୍ପର୍ଶକ।

ବିକଳ୍ପ ପ୍ରଣାଳୀ :

ବିଶ୍ଳେଷଣ : Q ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଯେକୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ। Q ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶକ ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ହେବ। ମନେକର Q ବିନ୍ଦୁରେ $\overleftrightarrow{PQR}$ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ଏବଂ $\overline{QN}$ ଏବଂ $\overline{QM}$ ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା। M, Nକୁ ଯୋଗ କରାଯାଇଛି। (ଚିତ୍ର 6.6)



[ଚିତ୍ର 6.6]

$\therefore$ $m\angle NQR = m\angle QMN$ ହେବ।

$\because$ ବୃତ୍ତର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଜ୍ୟା ସହିତ ଯେଉଁ ପରିମାଣ କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରେ ତା'ର ପରିମାଣ ଉକ୍ତ କୋଣର ଏକାନ୍ତର ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣର (ଅଥବା ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡସ୍ଥ କୋଣର) ପରିମାଣ ସହ ସମାନ।

ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ :

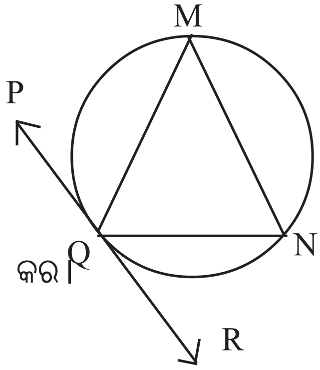
(i) ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟ ଅବଲମ୍ବନ କରି ବୃତ୍ତଟିଏ ଅଙ୍କନ କର।

(ii) ବୃତ୍ତ ଉପରେ Q ନାମକ ବିନ୍ଦୁ ଚିହ୍ନଟ କର।

(iii) $\overline{QM}$, $\overline{QN}$ ଏବଂ $\overline{MN}$ ଜ୍ୟା ଅଙ୍କନ କର।

(iv) Q ବିନ୍ଦୁରେ $\angle QMN$ ର ସମାନ ପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ $\angle NQR$ ଅଙ୍କନ କର।

(v) $\overleftrightarrow{PR}$ ସ୍ପର୍ଶକ ଅଙ୍କନ କର।



ପ୍ରମାଣ : $m\angle NQR = m\angle QMN$ ହେତୁ $\overleftrightarrow{PR}$, Q ବିନ୍ଦୁରେ ବୃତ୍ତପ୍ରତି ସ୍ପର୍ଶକ ହେବ।[ଚିତ୍ର 6.7]

ଅଙ୍କନ - 3 :

କୌଣସି ଦତ୍ତ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ସ୍ପର୍ଶକ ଅଙ୍କନ।

(Drawing tangent to a given circle from a given point outside it.)

ମନେକର ABC ଏକ ଦତ୍ତ ବୃତ୍ତ ଏବଂ P ବିନ୍ଦୁରୁ ABC ବୃତ୍ତପ୍ରତି ସ୍ପର୍ଶକ ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ହେବ।

ସୂଚନା : ପ୍ରଶ୍ନରେ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ (r) ଓ ବୃତ୍ତ କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ P ବିନ୍ଦୁର ଦୂରତା (x) ଦିଆଯାଏ। ଫଳରେ ସ୍ପର୍ଶକ ଅଙ୍କନ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଆରମ୍ଭ ପୂର୍ବରୁ ଆମେ

(a) ଦତ୍ତ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତଟିଏ ଅଙ୍କନ କରୁ ଏବଂ ଏହାର କେନ୍ଦ୍ର O ଚିହ୍ନଟ କରୁ।

(b) O ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଏକ ରଶ୍ମି $\overrightarrow{OX}$ ଅଙ୍କନ କରୁ।

(c) Oକୁ କେନ୍ଦ୍ରକରି ଏବଂ r ଏକକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଏକ ଚାପ ଅଙ୍କନ କରୁ, ଯେପରି ଏହା $\overrightarrow{OX}$କୁ ଛେଦକରିବ।

(d) ସୋପାନ (c)ରେ ଅଙ୍କିତ ଚାପ ଓ ସୋପାନ (b) ରେ ଅଙ୍କିତ ରଶ୍ମିର ଛେଦବିନ୍ଦୁ ହିଁ ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ P। ଏହିପରି ଆମେ ଦତ୍ତ ବୃତ୍ତ ଓ ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ପାଇଥାଉ।

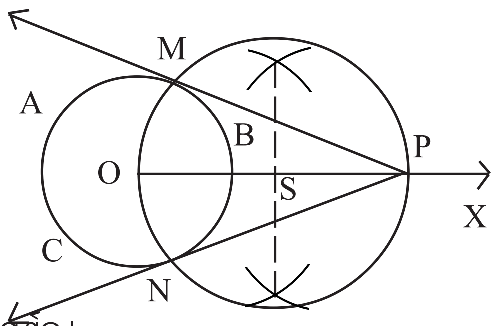
ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ :

(i) $\overline{OP}$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କରି ଏହାର ($\overline{OP}$ ର) ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ S ନିରୂପଣ କର।

(ii) Sକୁ କେନ୍ଦ୍ରକରି ଓ SP (ବା SO)କୁ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧରୂପେ ନେଇ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କର।

(iii) ସୋପାନ (ii)ରେ ଅଙ୍କିତ ବୃତ୍ତ ଓ ଦତ୍ତ ବୃତ୍ତର ଛେଦବିନ୍ଦୁ M ଓ N ଚିହ୍ନଟ କର।

(iv) $\overrightarrow{PM}$ ଓ $\overrightarrow{PN}$ ଅଙ୍କନ କର। $\overrightarrow{PM}$ ଓ $\overrightarrow{PN}$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସ୍ପର୍ଶକ।



[ଚିତ୍ର 6.8]

ପ୍ରମାଣ : $\overline{OM}$, $\overline{ON}$ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ।

∵ PMN ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସ $\overline{PO}$ ∴ $m\angle PMO = m\angle PNO = 90^0$

ପୁନଶ୍ଚ ଦତ୍ତ ବୃତ୍ତରେ $\overline{OM}$ ଓ $\overline{ON}$ ଦୁଇଟି ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଏବଂ $\overline{OM}$ ପ୍ରତି M ଠାରେ $\overrightarrow{PM}$ ଲମ୍ବ ଓ $\overline{ON}$ ପ୍ରତି N ଠାରେ $\overrightarrow{PN}$ ଲମ୍ବ।

∴ ଦତ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି $\overrightarrow{PM}$ ଓ $\overrightarrow{PN}$ ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 6(b)

1. 3 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କର। ବୃତ୍ତର ଯେ କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶକ ଅଙ୍କନ କର।
2. 3.5 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବୃତ୍ତରେ କେନ୍ଦ୍ରବିନ୍ଦୁର ସାହାଯ୍ୟ ନନେଇ ବୃତ୍ତର କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶକ ଅଙ୍କନ କର।
3. 3 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କର। ଏହାର କେନ୍ଦ୍ର O ହେଉ। P ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ

ବିନ୍ଦୁ। OP = 7 ସେ.ମି.। P ବିନ୍ଦୁରୁ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡ ଅଙ୍କନ କର। ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡଦ୍ୱୟ ମାପି ଉଭୟଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ପର୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

4. $\overline{AB}$ ଅଙ୍କନ କର। ଯେପରିକି AB = 4 ସେ.ମି.। $\overline{AB}$ କୁ ବ୍ୟାସ ରୂପେ ନେଇ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କର। A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ସ୍ପର୍ଶକ ଅଙ୍କନ କର। ଏହି ସ୍ପର୍ଶକଦ୍ୱୟ କିପରି ସମ୍ପର୍କିତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

5.(i) 4 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O। $\overline{OA}$ ଏବଂ $\overline{OB}$ ଦୁଇଟି ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $m\angle AOB = 90^0$। $\overleftrightarrow{AX}$ ଓ $\overleftrightarrow{BY}$ ପରସ୍ପରକୁ M ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଥିବା ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକ ଅଙ୍କନ କର। OAMB କି'ପ୍ରକାର ଚତୁର୍ଭୁଜ ପରୀକ୍ଷା କରି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

(ii) 2.5 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରି କେନ୍ଦ୍ରକୁ 'O' ନାମରେ ନାମିତ କର। $\overline{OA}$ ଏବଂ $\overline{OB}$ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଦୁଇଟି ଅଙ୍କନ କର ଯେପରି $m\angle AOB = 120^0$। A ଓ B ଠାରେ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ସ୍ପର୍ଶକ ଅଙ୍କନ କର ଓ ଛେଦବିନ୍ଦୁକୁ P ନାମ ଦିଅ। OAPB ଚତୁର୍ଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣ $\overline{OP}$ ଓ $\overline{AB}$ ଅଙ୍କନ କର। କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ପର୍କ ଅନୁଧ୍ୟାନ କର।

6. AB = 8 ସେ.ମି. ବିଶିଷ୍ଟ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଅଙ୍କନ କର। A ବିନ୍ଦୁକୁ କେନ୍ଦ୍ର ନେଇ 3 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କର ଓ B ବିନ୍ଦୁରୁ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକ ଅଙ୍କନ କର।

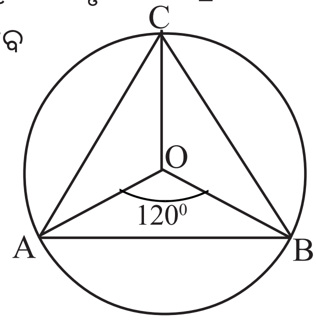
7. 6 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସ ବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତଟିଏ ଅଙ୍କନ କର। ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ 'P' ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଚିହ୍ନଟ କର ଯେପରିକି ବୃତ୍ତର ଯେଉଁ ବିନ୍ଦୁ 'P' ଠାରୁ ନିକଟତମ ତାହାର P ଠାରୁ ଦୂରତା 4.5 ସେ.ମି.। P ବିନ୍ଦୁରୁ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡ ଅଙ୍କନ କରି ତାହାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମାପି ଲେଖ।

8. 3 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କର । ଏହାର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P ରୁ $\overline{PA}$ ଓ $\overline{PB}$ ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡ ଅଙ୍କନ କର ଯେପରିକି $m\angle APB = 60^0$ ହେବ ।

6.4. ଅଙ୍କନ-4 : ଦତ୍ତ ବୃତ୍ତରେ (a) ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ (b) ବର୍ଗଚିତ୍ର (c) ସୁଷମ ଷଡ଼ଭୁଜ ଅନ୍ତର୍ଲିଖନ। (Inscribing (a) an equilateral triangle (b) a square (c) a regular hexagon in a given circle.)

ବିଶ୍ଳେଷଣ : ପୂର୍ବରୁ ପ୍ରମାଣିତ ହୋଇଛି ଯେ ଏକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରରେ ସମାନ ପରିମାଣ କୋଣ ଅଙ୍କନ କରୁଥିବା ଜ୍ୟାମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ। ଏଣୁ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜର ବାହୁମାନେ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରରେ ସମାନ ପରିମାଣର କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରିବେ। ଯଦି ବହୁଭୁଜଟିର ବାହୁସଂଖ୍ୟା n ହୁଏ ତେବେ

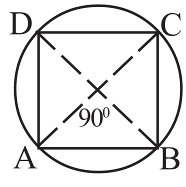
କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ ପରିମାଣ = $\frac{360^0}{n}$ ହେବ। ସୁତରାଂ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ହେଲେ,



[ଚିତ୍ର 6.9]

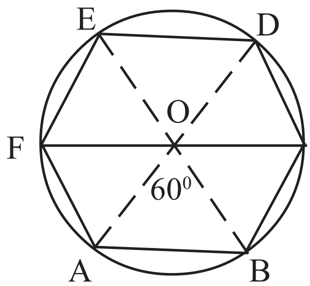
(a) ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁଦ୍ୱାରା ପରିବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣ ପରିମାଣ = $\frac{360^0}{3}$ = 120^0

(b) ବର୍ଗ ଚିତ୍ରର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁଦ୍ୱାରା ପରିବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣର ପରିମାଣ = $\frac{360^0}{4}$ = 90^0



[ଚିତ୍ର 6.10]

(c) ସୁଷମ ଷଡ଼ଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁଦ୍ୱାରା ପରିବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣ ପରିମାଣ = $\frac{360^0}{6} = 60^0$



[ଚିତ୍ର 6.11]

ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ :

ମନେକରାଯାଉ 3 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ ହେବ।

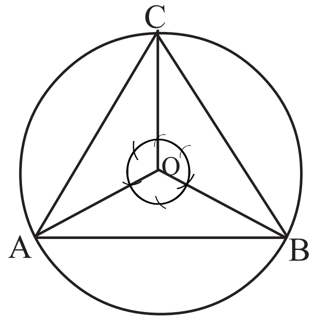
(a) ଦତ୍ତ ବୃତ୍ତରେ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ତର୍ଲିଖନ :

(i) ଦତ୍ତ ବୃତ୍ତଟି ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ।

(ii) $\overline{OA}$ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଅଙ୍କନ କରି ଏହା ଉପରେ 120^0 ପରିମିତି $\angle AOB$ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ।

(iii) $\overline{OB}$ ଉପରେ ପୂର୍ବପରି O ବିନ୍ଦୁରେ ଆଉ ଏକ 120^0 ପରିମିତ କୋଣ $\angle BOC$ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ।

(iv) ଫଳରେ ବୃତ୍ତରେ A, B, C ତିନିଗୋଟି ବିନ୍ଦୁ ମିଳିବ।



[ଚିତ୍ର 6.12]

(v) ଏହି A, B, C ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କୁ ପର୍ଯ୍ୟାୟକ୍ରମେ ଯୋଗ କଲେ ଆବଶ୍ୟକୀୟ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ମିଳିବ। (ଚିତ୍ର 6.12)

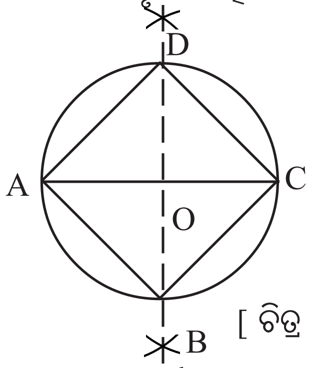
(b) ଦତ୍ତ ବୃତ୍ତରେ ବର୍ଗଚିତ୍ରର ଅନ୍ତର୍ଲିଖନ ପ୍ରଣାଳୀ :

(i) ଦତ୍ତ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତଟି ଅଙ୍କନ କର।

(ii) ଯେକୌଣସି ଏକ ବ୍ୟାସ $\overline{AC}$ ଅଙ୍କନ କର।

(iii) $\overline{AC}$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ $\overline{BD}$ ଅଙ୍କନ କର।

(iv) ବୃତ୍ତ ଉପରେ ଚାରିଗୋଟି ବିନ୍ଦୁ A, B, C, D ଚିହ୍ନଟ କରି ସେଗୁଡ଼ିକୁ ପର୍ଯ୍ୟାୟକ୍ରମେ ଯୋଗ କଲେ ABCD ଆବଶ୍ୟକ ବୃତ୍ତାନ୍ତଲିଖିତ ବର୍ଗଚିତ୍ର ହେବ।(ଚିତ୍ର 6.13)



[ଚିତ୍ର 6.13]

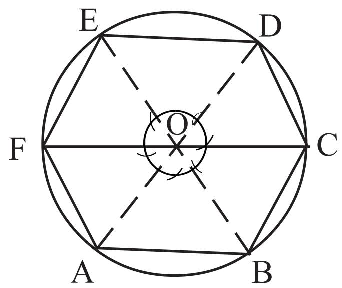
(c) ବୃତ୍ତରେ ସୁଷମ ଷଡ଼ଭୁଜର ଅନ୍ତର୍ଲିଖନ ପ୍ରଣାଳୀ :

(i) ଦତ୍ତ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତଟି ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ।

(ii) ବୃତ୍ତରେ $\overline{OA}$ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଅଙ୍କନ କରି 60^0 ପରିମାଣବିଶିଷ୍ଟ $\angle AOB$ କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ।

(iii) କମ୍ପାସ୍ ସାହାଯ୍ୟରେ O ବିନ୍ଦୁରେ $\angle AOB$ ସହ ସମାନ ପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ $\angle BOC$, $\angle COD$, $\angle DOE$, $\angle EOF$, $\angle FOA$ ଅଙ୍କନ କରି ବୃତ୍ତ ଉପରେ
C, D, E, F ବିନ୍ଦୁମାନ ଚିହ୍ନଟ କର।

(iv) A, B, C, D, E, F ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କୁ ପର୍ଯ୍ୟାୟକ୍ରମେ ଯୋଗକରି ଆବଶ୍ୟକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ସୁଷମ ଷଡ଼ଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର। (ଚିତ୍ର 6.14)



[ଚିତ୍ର 6.14]

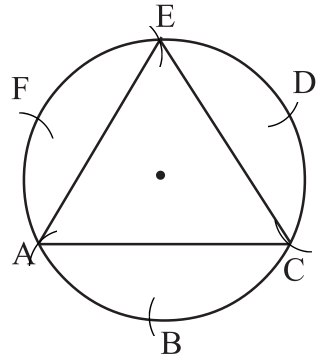
ବିକଳ୍ପ ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ

(ବୃତ୍ତରେ ସମବାହୁତ୍ରିଭୁଜ ଏବଂ ସମଷଡ଼ଭୁଜ ଅନ୍ତର୍ଲିଖନ) :

(i) ଦତ୍ତ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତଟି ଅଙ୍କନ କର।

(ii) ବୃତ୍ତ ଉପରେ ଯେକୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଚିହ୍ନଟ କରି ତାକୁ A ନାମରେ ନାମିତ କର।

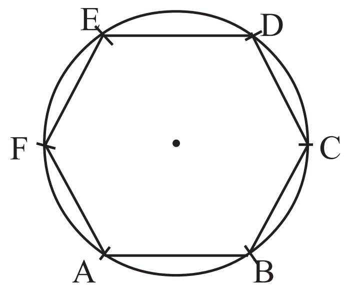
(iii) ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ସହ ସମାନ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ A ବିନ୍ଦୁକୁ କେନ୍ଦ୍ରକରି ଏକ ଚାପ ଅଙ୍କନ କର ଓ ତାହା ବୃତ୍ତକୁ ଯେଉଁ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରିବ ତା'ର ନାମ ଦିଅ B ।



[ଚିତ୍ର 6.15]

(iv) ପୁନଶ୍ଚ ସୋପାନ (iii) ଭଳି B କେନ୍ଦ୍ର ବିଶିଷ୍ଟ ଚାପ ଅଙ୍କନ କରି C ବିନ୍ଦୁ ଚିହ୍ନଟ କର। ଏହିଭଳି କ୍ରମାନ୍ୱୟରେ ବୃତ୍ତ ଉପରେ D, E, F ବିନ୍ଦୁମାନ ଚିହ୍ନଟ କର। ବର୍ତ୍ତମାନ ବୃତ୍ତଟି ଛଅଗୋଟି ସର୍ବସମ ଚାପରେ ପରିଣତ ହେଲା ଏବଂ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ 60^0 ହେବ।

(v) ବୃତ୍ତ ଉପରେ ଛଅଗୋଟି ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟରୁ ଏକାନ୍ତର ବିନ୍ଦୁ ତିନୋଟିକୁ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ରୂପେ ନେଇ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର। (ହୁଏତ ACE ତ୍ରିଭୁଜ ଅଥବା BDF ତ୍ରିଭୁଜ ମିଳିବ) ଉତ୍ପନ୍ନ ତ୍ରିଭୁଜଟି ଏକ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ। (ଚିତ୍ର 6.15)



[ଚିତ୍ର 6.16]

(vi) ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଛଅଗୋଟି ବିନ୍ଦୁକୁ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ରୂପେ ନେଇ ଏକ ସମଷଡ଼ଭୁଜ ABCDEF ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁରେ ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ ହୋଇପାରିବ। (ଚିତ୍ର 6.16)

6.5. ଦତ୍ତ ବୃତ୍ତରେ (a) ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ (b) ବର୍ଗଚିତ୍ର (c) ସୁଷମ ଷଡ଼ଭୁଜ ପରିଲିଖନ।

(Construction of (a) an equilateral triangle (b) a square (c) a regular hexagon circumscribing a given circle.)

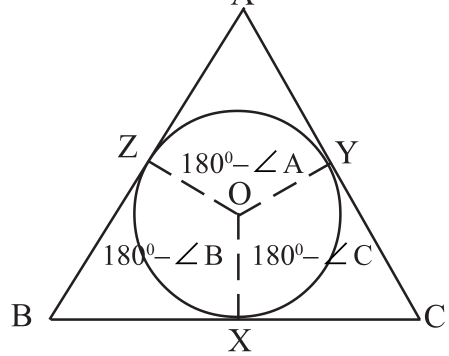
ସଂଜ୍ଞା : ଏକ ବହୁଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁ କୌଣସି ବୃତ୍ତକୁ ସ୍ପର୍ଶକଲେ ଉକ୍ତ ବହୁଭୁଜକୁ ସଂପୃକ୍ତ ବୃତ୍ତର ପରିଲିଖିତ ବହୁଭୁଜ କୁହାଯାଏ।

ଅଙ୍କନ - 5 :

(a) ଦତ୍ତ ବୃତ୍ତରେ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ପରିଲିଖନ :

ବିଶ୍ଳେଷଣ : ଦତ୍ତ ବୃତ୍ତର O, କେନ୍ଦ୍ର। OX, OY, OZ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ। ମନେକର ABC ଦତ୍ତ ବୃତ୍ତ ପରିଲିଖିତ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ । $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ ଏବଂ $\overline{AB}$ ଯଥାକ୍ରମେ X, Y, Z ବିନ୍ଦୁରେ ବୃତ୍ତକୁ ସ୍ପର୍ଶ କରୁଛନ୍ତି। AZOY ଚତୁର୍ଭୁଜରେ

$m\angle AZO = 90^0$, $m\angle AYO = 90^0$ } $\because$ ସ୍ପର୍ଶକ ସ୍ପର୍ଶ ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ପ୍ରତିଲମ୍ବ।



[ଚିତ୍ର 6.17]

$\therefore \quad m\angle ZOY = 360^0 - \{m\angle AZY + m\angle AYZ + m\angle A\}$

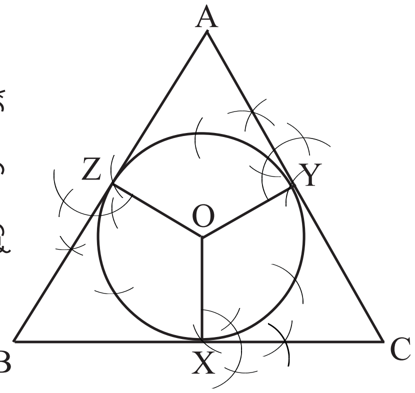
$= 360^0 - \{90^0 + 90^0 + m\angle A\} = 180^0 - m\angle A$

ସେହିପରି ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇପାରେ ଯେ $m\angle XOZ = 180^0 - m\angle B$, $m\angle XOY = 180^0 - m\angle C$

$\because$ ABC ତ୍ରିଭୁଜଟି ସମବାହୁ $\Rightarrow m\angle A = m\angle B = m\angle C = 60^0$

$\therefore \quad m\angle XOY = m\angle YOZ = m\angle ZOX = 120^0$.

ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ :



[ଚିତ୍ର 6.18]

(i) ଦତ୍ତ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କର।

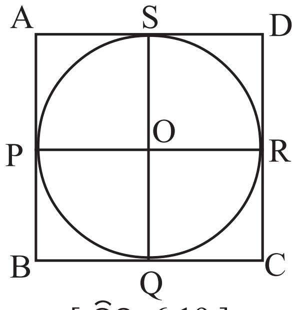
(ii) ବୃତ୍ତର ଯେକୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଆରମ୍ଭ କରି ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ସଙ୍ଗେ ସମାନ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ କ୍ରମାନ୍ୱୟରେ ଚାପ ଅଙ୍କନ କଲେ ବୃତ୍ତ ଉପରେ ଛଅଗୋଟି ବିନ୍ଦୁ ମିଳିବ ଯାହାକି ବୃତ୍ତକୁ ଛଅଗୋଟି ସର୍ବସମ ଚାପରେ ପରିଣତ କରିବ।

(iii) ଗୋଟିଏ ଛାଡ଼ି ଗୋଟିଏ ଚିହ୍ନିତ ବିନ୍ଦୁକୁ O ବିନ୍ଦୁ ସହିତ ଯୋଗକରି $\overline{OX}$, $\overline{OY}$, $\overline{OZ}$ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଅଙ୍କନ କର। ଫଳରେ $m\angle XOY = m\angle YOZ = m\angle ZOX = 120^0$ ହେବ।

(iv) X, Y, Z ବିନ୍ଦୁରେ $\overline{OX}$, $\overline{OY}$, $\overline{OZ}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କରି ତିନିଟି ସ୍ପର୍ଶକ ଅଙ୍କନ କର। ସ୍ପର୍ଶକତ୍ରୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁ A, B, C ହେଉ।

(v) ΔABC ଦତ୍ତ ବୃତ୍ତର ପରିଲିଖିତ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ହେବ।

(b) ଦତ୍ତ ବୃତ୍ତରେ ବର୍ଗଚିତ୍ରର ପରିଲିଖନ :



[ଚିତ୍ର 6.19]

ବିଶ୍ଳେଷଣ : ଦତ୍ତ ବୃତ୍ତର O, କେନ୍ଦ୍ର। ମନେକର ABCD ବୃତ୍ତର ପରିଲିଖିତ ବର୍ଗଚିତ୍ର। ଯାହାର $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ ଏବଂ $\overline{AD}$ ବାହୁ ବୃତ୍ତକୁ ଯଥାକ୍ରମେ P, Q, R ଓ S ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କରୁଛି। POQB ଚତୁର୍ଭୁଜରେ $m\angle B = 90^0$

($\because$ ବର୍ଗଚିତ୍ରର ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣର ପରିମାଣ 90^0।)

$\left.\begin{array}{l} m\angle OPB = 90^0 \\ m\angle POQ = 90^0 \end{array}\right\} \because$ ସ୍ପର୍ଶକ ସ୍ପର୍ଶ ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ପ୍ରତିଲମ୍ବ।

$\therefore \quad m\angle POQ = 90$

ସେହିପରି ଦର୍ଶାଯାଇପାରେ ଯେ, $m\angle QOR = m\angle ROS = m\angle SOP = 90^0$

$\therefore$ $\overline{PR}$ ଏବଂ $\overline{SQ}$ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ବ୍ୟାସ ପରସ୍ପରର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ ହେବେ।

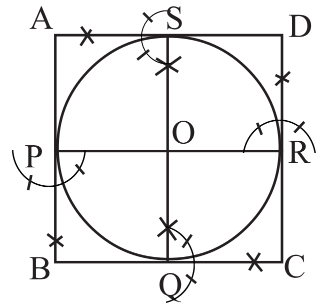
ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ :

(i) ଦତ୍ତ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କର।

(ii) $\overline{PR}$ ବ୍ୟାସର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ $\overline{SQ}$ ଅଙ୍କନ କର।

(iii) P, Q, R, S ବିନ୍ଦୁରେ ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$ ଲମ୍ବମାନ ଅଙ୍କନ କର।

ଫଳରେ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବଗୁଡ଼ିକ P, Q, R, S ବିନ୍ଦୁରେ ବୃତ୍ତର ସ୍ପର୍ଶକ ହେବେ।



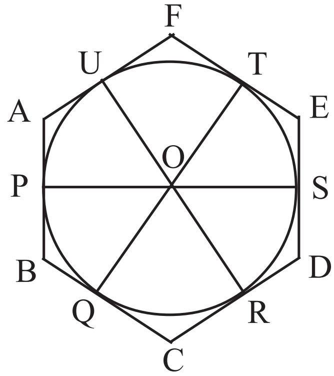
[ଚିତ୍ର 6.20]

(iv) ABCD ଆବଶ୍ୟକ ପରିଲିଖିତ ବର୍ଗଚିତ୍ର ହେବ।

(c) ଦତ୍ତ ବୃତ୍ତରେ ସମଷଡ଼ଭୁଜ ପରିଲିଖନ :

ଦତ୍ତ ବୃତ୍ତର O କେନ୍ଦ୍ର।

ମନେକର ABCDEF ସୁଷମ ଷଡ଼ଭୁଜ ବୃତ୍ତର ପରିଲିଖିତ। ଏହାର $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FA}$ ବାହୁଗୁଡ଼ିକ ବୃତ୍ତକୁ P, Q, R, S, T, U ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କରନ୍ତି।



[ଚିତ୍ର 6.21]

ବର୍ତ୍ତମାନ QCRO ଚତୁର୍ଭୁଜରେ

$m\angle OQC = 90^0$, $m\angle CRO = 90^0$ } $\because$ ସ୍ପର୍ଶକ ସ୍ପର୍ଶ ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ପ୍ରତିଲମ୍ବ।

$m\angle QCR = 120^0$ ($\because$ ସୁଷମ ଷଡ଼ଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅନ୍ତସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ 120^0)

$\therefore$ $m\angle QOR = 60^0$

ସେହିପରି $m\angle ROS = m\angle SOT = m\angle TOU = m\angle UOP = m\angle POQ = 60^0$

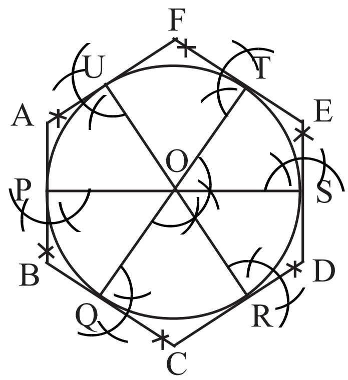
ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ :

(i) ଦତ୍ତ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କର।

$\overline{QT}$ ବ୍ୟାସ ଅଙ୍କନ କର।

(ii) କେନ୍ଦ୍ରରେ $m\angle QOR = m\angle ROS = 60^0$ ଅଙ୍କନ କର ଏବଂ $\overline{RU}$, $\overline{SP}$ ବ୍ୟାସ ଅଙ୍କନ କର।

(iii) P, Q, R, S, T, U ମଧ୍ୟ ଦେଇ ବ୍ୟାସମାନଙ୍କ ପ୍ରତି ଲମ୍ବମାନ ଅଙ୍କନ କର। ଫଳରେ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{AB}$ ବୃତ୍ତର ସ୍ପର୍ଶକ ହେବ।



[ଚିତ୍ର 6.22]

(iv) $\therefore$ ABCDEF ବୃତ୍ତର ପରିଲିଖିତ ସୁଷମ ଷଡ଼ଭୁଜ ହେବ।

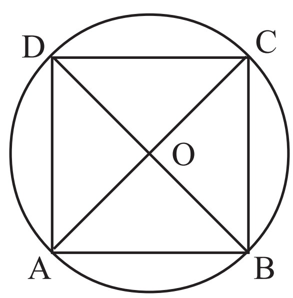
6.6. ଅଙ୍କନ - 6 : ଦତ୍ତ ବର୍ଗଚିତ୍ରର (a) ପରିବୃତ୍ତ ଓ (b) ଅନ୍ତଃବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ

(Drawing (a) Circum-circle and (b) In-circle of a given square.)

(a) ଦତ୍ତ ବର୍ଗଚିତ୍ରର ପରିବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ :

ସଂଜ୍ଞା : ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ରର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ବୃତ୍ତକୁ ଉକ୍ତ ବର୍ଗଚିତ୍ରର ପରିବୃତ୍ତ ଓ ସେହି ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରକୁ ପରିକେନ୍ଦ୍ର କୁହାଯାଏ।

ବିଶ୍ଳେଷଣ : ବର୍ଗଚିତ୍ରଟିଏ ଦତ୍ତ ଅଛି। ଏହାର ପରିବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ହେବ। ଅର୍ଥାତ୍ ପରିବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରର ଅବସ୍ଥିତି ଏବଂ ପରିବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ହେବ।



[ଚିତ୍ର 6.23]

ABCD ବର୍ଗଚିତ୍ରର A, B, C, D କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ବର୍ଗଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ $\overline{AC}$ ଏବଂ $\overline{BD}$ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସ ହେବେ।

∵ ବର୍ଗଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ଓ ସେମାନେ ପରସ୍ପରକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି।

∴ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସ ଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁ 'O' ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ହେବ।

ଫଳରେ $\overline{OA}$ ବା $\overline{OB}$ ବା $\overline{OC}$ ବା $\overline{OD}$ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ହେବ।

ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ :

(i) ବର୍ଗଚିତ୍ର ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଦତ୍ତ ମାପକୁ ନେଇ ବର୍ଗଚିତ୍ରଟିଏ ଅଙ୍କନ କର।

(ii) ଅଙ୍କିତ ବର୍ଗଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ଅଙ୍କନ କର ଓ ସେମାନଙ୍କର ଛେଦବିନ୍ଦୁର ନାମ 'O' ଦିଅ।

(iii) O କୁ କେନ୍ଦ୍ରକରି OA ବା OB ବା OC ବା OD ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କଲେ ଆବଶ୍ୟକ ପରିବୃତ୍ତ ଅଙ୍କିତ ହେବ।

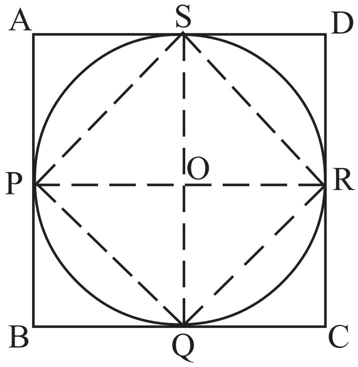
ମନ୍ତବ୍ୟ : ଆୟତଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ଓ ସେମାନେ ପରସ୍ପରକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି। ତେଣୁ ପୂର୍ବୋକ୍ତ ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ ଅନୁସାରେ ଏହାର ପରିବୃତ୍ତ ମଧ୍ୟ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରେ।

(b) ଦତ୍ତ ବର୍ଗଚିତ୍ରର ଅନ୍ତଃବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ :

ସଂଜ୍ଞା : ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ରର ବାହୁମାନଙ୍କୁ ସ୍ପର୍ଶ କରୁଥିବା ବୃତ୍ତକୁ ଉକ୍ତ ବର୍ଗଚିତ୍ରର ଅନ୍ତଃବୃତ୍ତ ଓ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରକୁ ଅନ୍ତଃକେନ୍ଦ୍ର କୁହାଯାଏ।

ବିଶ୍ଳେଷଣ : ମନେକର ଦତ୍ତ ବର୍ଗଚିତ୍ର ABCD ର ଅନ୍ତଃବୃତ୍ତ PQRS। P, Q, R, S ବିନ୍ଦୁମାନ ଉଭୟ ବର୍ଗଚିତ୍ର ଓ ବୃତ୍ତର ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ଅଟନ୍ତି। ପୂର୍ବରୁ ତୁମେ ପ୍ରମାଣ କରିଛ, ବର୍ଗଚିତ୍ରର ବାହୁମାନଙ୍କର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକୁ ପର୍ଯ୍ୟାୟକ୍ରମେ ଯୋଗ କଲେ ଉତ୍ପନ୍ନ ଚତୁର୍ଭୁଜ ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ର ଓ ଏହାର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ମୂଳ ବର୍ଗଚିତ୍ରର ବାହୁମାନଙ୍କ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ।

PQRS ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ର। ଏହାର ପରିବୃତ୍ତ ହିଁ ABCD ବର୍ଗଚିତ୍ରର ଅନ୍ତଃବୃତ୍ତ ଅଟେ।



[ଚିତ୍ର 6.24]

ପୁନଶ୍ଚ ତୁମେ ପୂର୍ବରୁ ଜାଣିଛ କୌଣସି ବର୍ଗଚିତ୍ରର ବିପରୀତ ବାହୁଗୁଡ଼ିକର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡ ଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁ ଏବଂ ଉକ୍ତ ବର୍ଗଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁ ଅଭିନ୍ନ।

$\because$ $\overline{PR}$ ଓ $\overline{SQ}$ ର ଛେଦବିନ୍ଦୁ ଏବଂ $\overline{AC}$ ଏବଂ $\overline{BD}$ ର ଛେଦବିନ୍ଦୁ 'O' ଅଟେ। ବିଶ୍ଳେଷଣରୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଗଲା ଯେ ABCD ବର୍ଗଚିତ୍ରର $\overline{AC}$ ଏବଂ $\overline{BD}$ ର ଛେଦବିନ୍ଦୁ 'O' ଆବଶ୍ୟକ ଅନ୍ତଃବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ O ବିନ୍ଦୁରୁ ମୂଳ ବର୍ଗଚିତ୍ରର ବାହୁପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବହିଁ ଅନ୍ତଃବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ।

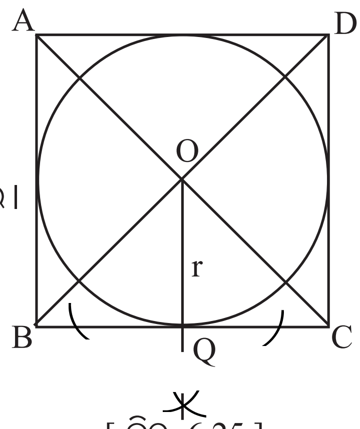
ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ :

(i) ବର୍ଗଚିତ୍ର ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଦତ୍ତ ମାପକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ବର୍ଗଚିତ୍ର ABCD ଅଙ୍କନ କର।

(ii) $\overline{AC}$ ଏବଂ $\overline{BD}$ କର୍ଣ୍ଣ ଅଙ୍କନ କରି ଛେଦବିନ୍ଦୁ 'O' ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

(iii) O ବିନ୍ଦୁରୁ ଯେକୌଣସି ବାହୁପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର। ଚିତ୍ରରେ $\overline{BC}$ ପ୍ରତି $\overline{OQ}$ ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇଛି।

(iv) O ବିନ୍ଦୁକୁ କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ OQକୁ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କଲେ ମୂଳ ବର୍ଗଚିତ୍ରର ଆବଶ୍ୟକୀୟ ଅନ୍ତଃବୃତ୍ତ ମିଳିବ।



[ଚିତ୍ର 6.25]

ଅନୁଶୀଳନୀ - 6 (c)

1. 4 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରି ଏଥିରେ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଅନ୍ତର୍ଲିଖନ କର।
2. 3.5 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରି ଏଥିରେ ଏକ ସମବାହୁ Δ ପରିଲିଖନ।
3. 2.5 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରି ଏଥିରେ ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ର ଅନ୍ତର୍ଲିଖନ କର।
4. 1.5 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରି ଏଥିରେ ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ର ପରିଲିଖନ କର।
5. 3.5 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରି ଏଥିରେ ଏକ ସୁଷମ ଷଡ଼ଭୁଜ ଅନ୍ତର୍ଲିଖନ କର।

6. 3.8 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରି ଏକ ସୁଷମ ଷଡ଼ଭୁଜ ପରିଲିଖନ କର ।

7. 4 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରି ଏଥିରେ ଏକ ସୁଷମ ଷଡ଼ଭୁଜ ପରିଲିଖନ କର।

8. 7.5 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବୃତ୍ତରେ ଏକ ସମକୋଣୀ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଅନ୍ତର୍ଲିଖନ କର।

9. 8 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବୃତ୍ତରେ ଏକ ସମକୋଣୀ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ପରିର୍ଲିଖନ କର।

(ସୂଚନା : ସ୍ପର୍ଶ ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ତ୍ରୟର ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣମାନଙ୍କର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାଣ 90^0, 135^0 ଏବଂ 135^0)

10. 9 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବୃତ୍ତରେ ABC ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଅନ୍ତର୍ଲିଖନ କର ଯାହାର ଭୂମି BC = 7 ସେ.ମି.

11. 3 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରି ତହିଁରେ 7 ସେ.ମି. ଉଚ୍ଚତା ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ପରିଲିଖନ କର।

12. 4 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କର ତହିଁରେ 6 ସେ.ମି. ଉଚ୍ଚତା ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଅନ୍ତର୍ଲିଖନ କର।

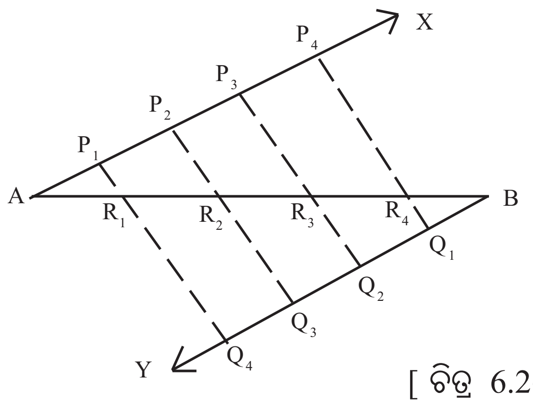
13. 2.5 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରି ତହିଁରେ ଏକ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ପରିର୍ଲିଖନ କର ଯାହାର ଶୀର୍ଷକୋଣ 45^0 ହେବ।

14. ଏକ ଆୟତଚିତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 7.5 ସେ.ମି., ପ୍ରସ୍ଥ 4 ସେ.ମି.। ଆୟତ ଚିତ୍ରଟି ଅଙ୍କନ କରି ଏହାର ପରିବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କର।

6.7. ଅଙ୍କନ - 7 : ଦତ୍ତ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ରେଖାଖଣ୍ଡର ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟକ ସର୍ବସମ ଅଂଶରେ ବିଭାଜନ

(Dividing a line segment of given length into a given number of equal parts.)

$\overline{AB}$ ଏକ ଦତ୍ତ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ରେଖାଖଣ୍ଡ । ମନେକରାଯାଉ, ଏହାକୁ 5 ଟି ସର୍ବସମ ଅଂଶରେ ଭାଗ କରିବାକୁ ହେବ ।



[ଚିତ୍ର 6.26]

ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ :

(i) ଦତ୍ତ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ $\overline{AB}$ ଅଙ୍କନ କର ।

(ii) $\overline{AB}$ ର A ଓ B ଠାରେ ଯଥାକ୍ରମେ $\overrightarrow{AX}$ ଓ $\overrightarrow{BY}$ ରଶ୍ମି ଅଙ୍କନ କର, ଯେପରି X ଓ Y , $\overline{AB}$ ର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ରହିବେ ଏବଂ $m\angle BAX = m\angle ABY$ ହେବ । ଫଳରେ $\overrightarrow{AX} \parallel \overrightarrow{BY}$ ହେବ ।

(iii) A କୁ କେନ୍ଦ୍ର ଓ ଏକ ସୁବିଧାଜନକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r ନେଇ ଏକ ଚାପ ଅଙ୍କନ କର ଓ ଏହି ଚାପ ଯେଉଁ ବିନ୍ଦୁରେ $\overrightarrow{AX}$ କୁ ଛେଦ କରିବ ତାର ନାମ P_1 ଦିଅ । ଏହିପରି ଚାପ ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀରେ $\overrightarrow{AX}$ ଉପରେ P_2, P_3, P_4 ବିନ୍ଦୁମାନ (5–1 = 4 ଗୋଟି) ଚିହ୍ନଟ କର ଯେପରି $AP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_4 = r$ ହେବ ।

(iv) ପୂର୍ବୋକ୍ତ ପ୍ରଣାଳୀ (ସୋପାନ (iii) ରେ ବର୍ଣ୍ଣିତ) ଅବଲମ୍ବନ କରି $\overrightarrow{BY}$ ଉପରେ Q_1, Q_2, Q_3 ଓ Q_4 ବିନ୍ଦୁ ଚାରୋଟି ଚିହ୍ନଟ କର ଯେପରି $BQ_1 = Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = Q_3Q_4 = r$ ହେବ ।

(v) $\overline{P_1Q_4}$, $\overline{P_2Q_3}$, $\overline{P_3Q_2}$, $\overline{P_4Q_1}$ ଅଙ୍କନ କର ଓ ଯେଉଁ ବିନ୍ଦୁରେ ଉକ୍ତ ରେଖାମାନ $\overline{AB}$ କୁ ଛେଦ କରିବେ ସେଗୁଡ଼ିକୁ ଯଥାକ୍ରମେ R_1, R_2, R_3 ଓ R_4 ଭାବେ ନାମିତ କର ।

$AR_1 = R_1R_2 = R_2R_3 = R_4B$ । ଅର୍ଥାତ୍ $\overline{AB}$ ପାଞ୍ଚଗୋଟି ସର୍ବସମ ଅଂଶରେ ପରିଣତ ହେଲା ।

ପ୍ରମାଣ : $\Delta AP_4R_4 \sim \Delta BQ_1R_4$ (A-A-A ସାଦୃଶ୍ୟ) (ଚିତ୍ର 6.26 ଦେଖ)

$$\frac{AR_4}{R_4B} = \frac{AP_4}{BQ_1} = \frac{4r}{r} = \frac{4}{1} \Rightarrow \frac{AR_4}{R_4B} + 1 = \frac{4}{1} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{AR_4 + R_4B}{R_4B} = \frac{5}{1} \Rightarrow \frac{AB}{R_4B} = \frac{5}{1} \Rightarrow R_4B = \frac{AB}{5} ....(i)$$

ସେହିପରି ଦର୍ଶାଯାଇପାରେ ଯେ $R_3B = \frac{2}{5}AB$, $R_2B = \frac{3}{5}AB$, $R_1B = \frac{4}{5}AB$ ।

$AR_1 = R_1R_2 = R_2R_3 = R_3R_4 = R_4B \left(= \frac{AB}{5}\right)$

6.8 ଅଙ୍କନ - 8 : ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଅନୁପାତରେ ଏକ ଦତ୍ତ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଅନ୍ତର୍ବିଭାଜନ ଓ ବହିର୍ବିଭାଜନ ।

(Dividing a given line segment in a given ratio internally and externally.)

$\overline{AB}$ ଏକ ଦତ୍ତ ରେଖାଖଣ୍ଡ । $\overline{AB}$ କୁ ଏକ ଦତ୍ତ ଅନୁପାତ a : b ରେ (a) ଅନ୍ତର୍ବିଭାଜନ (b) ବହିର୍ବିଭାଜନ କରିବାକୁ ହେବ, ଅର୍ଥାତ୍ –

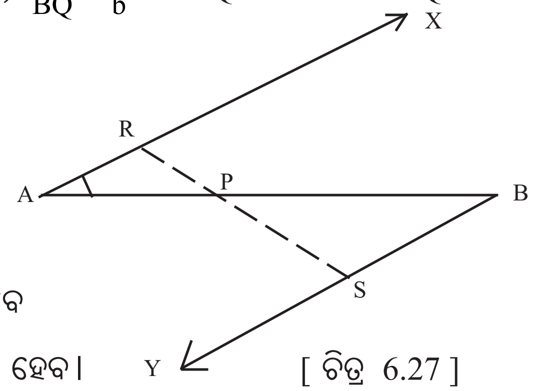
(a) $\overline{AB}$ ଉପରେ P ବିନ୍ଦୁ ଚିହ୍ନଟ କରିବାକୁ ହେବ, ଯେପରି, $\frac{AP}{BP} = \frac{a}{b}$

(b) $\overleftrightarrow{AB}$ ଉପରେ Q ବିନ୍ଦୁ ଚିହ୍ନଟ କରିବାକୁ ହେବ, ଯେପରି, $\frac{AQ}{BQ} = \frac{a}{b}$ ଏବଂ Q–A–B ବା A–B–Q ।

ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ : (a) ଅନ୍ତର୍ବିଭାଜନ :

(i) ଦତ୍ତ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ରେଖାଖଣ୍ଡ $\overline{AB}$ ଅଙ୍କନ କର ।

(ii) $\overline{AB}$ ର A ଓ B ବିନ୍ଦୁ ଠାରେ ଯଥାକ୍ରମେ $\overrightarrow{AX}$ ଓ $\overrightarrow{BY}$ ରଶ୍ମି ଅଙ୍କନ କର, ଯେପରି X, Y, $\overleftrightarrow{AB}$ ର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥାନ କରିବେ ଓ $m\angle XAB = m\angle ABY$ ହେବ । ଫଳରେ $\overrightarrow{AX} \parallel \overrightarrow{BY}$ ହେବ।



[ଚିତ୍ର 6.27]

(ଦତ୍ତ ଅନୁପାତ a : b ରେ a ଓ b ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଧନାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା ଓ ଏଠାରେ $a < b$)।

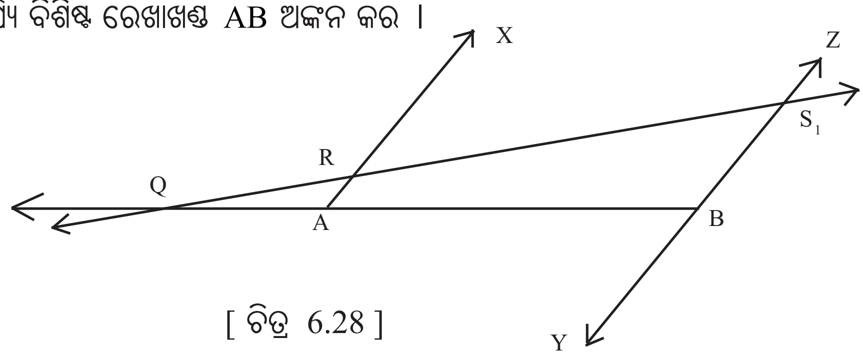
(iii) କମ୍ପାସରେ ଆବଶ୍ୟକମତେ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ $\overrightarrow{AX}$ ଉପରେ R ଓ $\overrightarrow{BY}$ ଉପରେ S ଚିହ୍ନଟ କର, ଯେପରିକି $AR = a$ ଏକକ ଓ $BS = b$ ହେବ ।

(iv) $\overleftrightarrow{RS}$ ଅଙ୍କନ କର ।

(v) $\overleftrightarrow{RS}$ ଓ $\overline{AB}$ ର ଛେଦବିନ୍ଦୁ କୁ P ନାମ ଦିଅ । ବର୍ତ୍ତମାନ $\overline{AB}$ ରେଖାଖଣ୍ଡ P ବିନ୍ଦୁରେ $a : b$ ଅନୁପାତରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭାଜିତ ହେଲା ।

(b) ବହିର୍ବିଭାଜନ :

(i) ଦତ୍ତ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ରେଖାଖଣ୍ଡ $\overline{AB}$ ଅଙ୍କନ କର ।



[ଚିତ୍ର 6.28]

(ii) $\overline{AB}$ ର A ବିନ୍ଦୁରେ $\overrightarrow{AX}$ ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ $\overrightarrow{BY}$ ଅଙ୍କନ କର ଯେପରି X ଓ Y $\overline{AB}$ ର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ରହିବେ ଓ $m\angle XAB = m\angle ABY$ ହେବ । ତତ୍ପରେ $\overrightarrow{BY}$ ର ବିପରୀତ ରଶ୍ମି $\overrightarrow{BZ}$ ଅଙ୍କନ କର ।

(iii) କମ୍ପାସ ସାହାଯ୍ୟରେ $\overrightarrow{AX}$ ଉପରେ R ଓ $\overrightarrow{BZ}$ ଉପରେ S_1 ବିନ୍ଦୁ ଚିହ୍ନଟ କର
ଯେପରିକି $AR = a$ ଏକକ ଏବଂ $BS_1 = b$ ଏକକ ।

(iv) $\overleftrightarrow{RS}$ ଅଙ୍କନ କର ।

(v) $\overleftrightarrow{RS}$ ଓ $\overleftrightarrow{BA}$ ର ଛେଦ ବିନ୍ଦୁକୁ Q ନାମ ଦିଅ । ବର୍ତ୍ତମାନ $\overline{AB}$ ରେଖାଖଣ୍ଡ Q ବିନ୍ଦୁରେ $a : b$ ଅନୁପାତରେ ବର୍ହିର୍ବିଭାଜିତ ହେଲା ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ଯଦି ଅନୁପାତ $a : b$ ରେ $a < b$ ହୋଇଥାଏ, ତେବେ Q-A-B ହେବ, ଅର୍ଥାତ୍ $AQ < BQ$ ହେବ । ଯଦି $a > b$ ହୋଇଥାଏ, ତେବେ A-B-Q ହେବ; ଅର୍ଥାତ୍ $AQ > BQ$ ହେବ ।

ଦତ୍ତ ଅନୁପାତ $a : b$ ରେ $\overline{BA}$ ର ଅନ୍ତର୍ବିଭାଜନ (ବା ବହିର୍ବିଭାଜନ) ସମୟରେ $AR = a$ ଏବଂ $BS = b$

(ବା $BS_1 = b$, ଯେଉଁଠି $\overrightarrow{BY}$ ର ବିପରୀତ ରଶ୍ମି ଉପରେ S_1 ଅବସ୍ଥିତ) ନିଆଯିବ ।

ଲକ୍ଷ୍ୟ କର : $\overline{AB}$ ର ବହିର୍ବିଭାଜନ ସମୟରେ –

(i) Q ବିନ୍ଦୁର ଅବସ୍ଥିତି $\overrightarrow{BA}$ ଉପରେ ଏପରି ହେବ ଯେ Q-A-B ଯଦି $a < b$

(ii) Q ବିନ୍ଦୁର ଅବସ୍ଥିତି $\overrightarrow{AB}$ ଉପରେ ଏପରି ହେବ ଯେ A – B – Q ଯଦି $a > b$

ପ୍ରମାଣ : (a) Δ APR ~ Δ BSP (କୋ-କୋ-କୋ-ସାଦୃଶ୍ୟ) $\Rightarrow \frac{AP}{BP} = \frac{AR}{BS} = \frac{a}{b}$

ଏଠାରେ ଦର୍ଶାଯାଇପାରେ ଯେ P ବିନ୍ଦୁ A ଓ B ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ।

ଫଳରେ ବିନ୍ଦୁ $\overline{AB}$ କୁ a : b ଅନୁପାତରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭାଜନ କରୁଛି ।

(b) Δ RAQ ~ S_1BQ (କୋ-କୋ-କୋ ସାଦୃଶ୍ୟ) $\Rightarrow \frac{AQ}{BQ} = \frac{AR}{BS_1} = \frac{a}{b}$

ପୁନଶ୍ଚ ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇପାରେ ଯେ Q-A-B ବା Q ବିନ୍ଦୁ $\overline{AB}$ ର ବହିଃସ୍ଥ ।

ଫଳରେ Q ବିନ୍ଦୁ $\overline{AB}$ କୁ a : b ଅନୁପାତରେ ବହିର୍ବିଭାଜନ କରୁଛି ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 6 (d)

1. (i) 6.5 ସେ.ମି. ଦୀର୍ଘ $\overline{AB}$ ଅଙ୍କନ କରି ଏହାର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁର ଅବସ୍ଥାନ ନିରୂପଣ କର ।

   (ii) 7.6 ସେ.ମି. ଦୀର୍ଘ $\overline{PQ}$ ଅଙ୍କନ କରି ଏହାକୁ 4 ସମାନ ଭାଗ କର ।

2. 7.2 ସେ.ମି. ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ସମାନ 6 ଭାଗ କର ।

3. 6.4 ସେ.ମି. ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ $\overline{AB}$ ଅଙ୍କନ କରି ଏହାକୁ 3:2 ଅନୁପାତରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭାଜନ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁର ଅବସ୍ଥାନ ନିରୂପଣ କର ।

4. 6.5 ସେ.ମି. ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ $\overline{BC}$ ଅଙ୍କନ କରି 5:3 ଅନୁପାତରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭାଜନ ଓ ବହିର୍ବିଭାଜନ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ନିରୂପଣ କର ।

5. 7.5 ସେ.ମି. ଦୀର୍ଘ $\overline{PQ}$ ଅଙ୍କନ କରି ଏହାକୁ ଦୁଇଟି ଅଂଶରେ ଭାଗ କର, ଯେପରିକି ସେମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନୁପାତ 4:3 ହେବ । ଏକ ଆୟତ ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ପ୍ରସ୍ଥ ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{PQ}$ ର ଦୁଇ ଅଂଶର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସହ ସମାନ ।

6. ΔABC ରେ BC = 6.5 ସେ.ମି., $\overline{BY}$ ମଧ୍ୟମାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 6 ସେ.ମି. ଓ $\overline{CZ}$ ମଧ୍ୟମାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 5.5 ସେ.ମି. । ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କର ।

ସୂଚନା :

ମନେକର ମଧ୍ୟମା ଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁ G, ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀରେ $\frac{2}{3}$BY = BG ଓ $\frac{2}{3}$CZ = CG ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ପ୍ରଥମେ ΔBCG ଅଙ୍କନ କର । $\overrightarrow{BG}$ ଉପରେ Y ବିନ୍ଦୁ ଓ $\overrightarrow{CG}$ ଉପରେ Z ବିନ୍ଦୁ ନିରୂପଣ କର ।

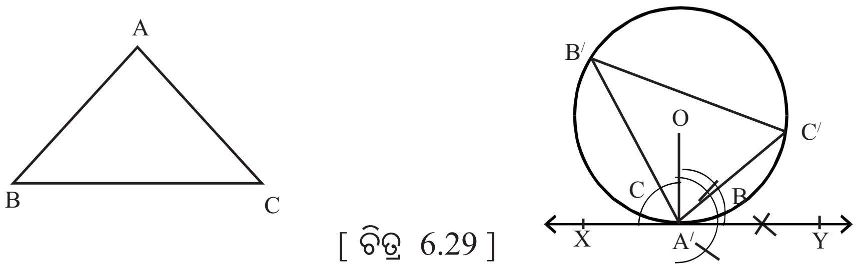
6.9. ଅଙ୍କନ – 9 : ଦତ୍ତ ବୃତ୍ତରେ ଦତ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜର ଏକ ସଦୃଶ ତ୍ରିଭୁଜ ଅନ୍ତର୍ଲିଖନ :

(Inscribing a triangle similar to a given triangle in a given circle.)

ମନେକରାଯାଉ 3 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବୃତ୍ତରେ ଗୋଟିଏ ଦତ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜ ସହ ସଦୃଶ ତ୍ରିଭୁଜ ଅନ୍ତର୍ଲିଖନ କରିବାକୁ ହେବ ।

ABC ଏକ ଦତ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜ ।

ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ : (i) ଦତ୍ତ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ବୃତ୍ତଟି ଅଙ୍କନ କର । ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ହେଉ ।



[ଚିତ୍ର 6.29]

(ii) $\overline{OA'}$ ଅଙ୍କନ କରି A' ଠାରେ 90^0 ପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ $\angle OA'Y$ ଅଙ୍କନ କର ।

(iii) $\overrightarrow{A'Y}$ ର ବିପରୀତ ରଶ୍ମି $\overrightarrow{A'X}$ ଅଙ୍କନ କରି ବୃତ୍ତପ୍ରତି A' ବିନ୍ଦୁରେ $\overleftrightarrow{XY}$ ସ୍ପର୍ଶକ ଅଙ୍କନ କର ।

(iv) A' ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ଜ୍ୟା $\overline{A'C'}$ ଅଙ୍କନ କର ଯେପରିକି $m\angle C'A'Y = m\angle ABC$ ହେବ । ସେହିପରି $\overline{A'B'}$ ଅଙ୍କନ କର ଯେପରିକି $m\angle XA'B' = m\angle ACB$ ହେବ ।

(v) $\overline{B'C'}$ ଅଙ୍କନ କର । ବର୍ତ୍ତମାନ $\Delta A'B'C'$ ଆବଶ୍ୟକୀୟ ତ୍ରିଭୁଜ ।

ପ୍ରମାଣ : $m\angle C'A'Y = m\angle ABC$ (ଚିତ୍ର 6.29 ଦେଖ)

କିନ୍ତୁ $m\angle C'A'Y = m\angle A'B'C'$ (ଏକାନ୍ତର ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ)

$\therefore m\angle ABC = m\angle A'B'C'$ ....(i)

ସେହିପରି $m\angle XA'B' = m\angle ACB$

କିନ୍ତୁ $m\angle XA'B' = m\angle A'C'B'$ (ଏକାନ୍ତର ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ)

$\therefore m\angle ACB = m\angle A'C'B'$ ....(ii)

$\therefore$ (i) ଓ (ii) ରୁ ପାଇବା $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

ଅଙ୍କନ – 10 : ଦତ୍ତ ବୃତ୍ତରେ ଦତ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜର ଏକ ସଦୃଶ ତ୍ରିଭୁଜ ପରିଲିଖନ :

(Circumscribing a triangle similar to a given triangle in a given circle.)

ମନେକରାଯାଉ 3 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବୃତ୍ତରେ ଗୋଟିଏ ଦତ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜ ସହ ସଦୃଶ ତ୍ରିଭୁଜ ପରିଲିଖନ କରିବାକୁ ହେବ ।

ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ : (i) ଦତ୍ତ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ବୃତ୍ତଟିଏ ଅଙ୍କନ କର । ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ହେଉ ।

(ii) $\overline{OM}$ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଅଙ୍କନ କର ।

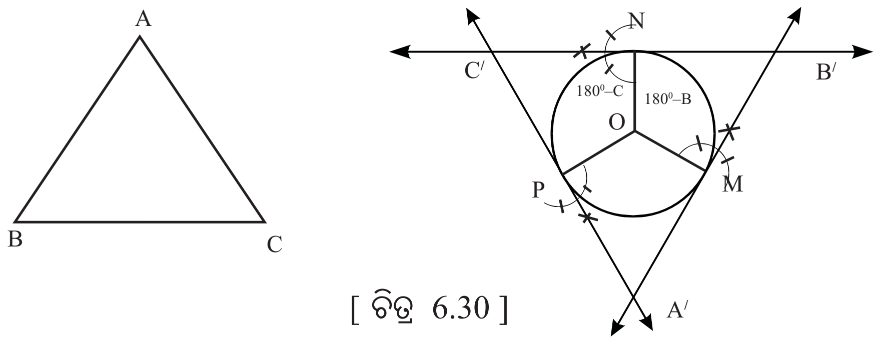
(iii) ଅନ୍ୟ ଏକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $\overline{ON}$ ଅଙ୍କନ କର ଯେପରିକି $\angle MON$ ର ପରିମାଣ $(180^0 - B)$ ଅର୍ଥାତ୍ $\angle B$ର ପରିପୂରକ କୋଣର ପରିମାଣ ସହ ସମାନ ହେବ ।

(iv) ପୁନଶ୍ଚ $\overline{OP}$ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଅଙ୍କନ କର ଯେପରିକି $\angle NOP$ ର ପରିମାଣ $(180^0 - C)$ ର ଅର୍ଥାତ୍ $\angle C$ ର ପରିପୂରକ କୋଣର ପରିମାଣ ସହ ସମାନ ହେବ ।

(v) ବର୍ତ୍ତମାନ M, N ଓ P ବିନ୍ଦୁରେ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ସ୍ପର୍ଶକ ମାନ ଅଙ୍କନ କର ।

(vi) M ଓ N ବିନ୍ଦୁରେ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁ, N ଓ P ବିନ୍ଦୁରେ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁ ଏବଂ P ଓ M ବିନ୍ଦୁରେ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁ ଯଥାକ୍ରମେ B', C', A' ହେଉ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଦତ୍ତବୃତ୍ତରେ ΔABC ର ସଦୃଶ $\Delta A'B'C$ ପରିଲିଖିତ ହେଲା ।



[ଚିତ୍ର 6.30]

ପ୍ରମାଣ : $OMB'N$ ଚତୁର୍ଭୁଜରେ

$m\angle OMB' + m\angle ONB' = 180^0$ (ସ୍ପର୍ଶକ ଓ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହେତୁ)

$\therefore m\angle MON + m\angle A'B'C' = 180^0$

$\Rightarrow 180^0 - m\angle B + m\angle A'B'C' = 180^0 \Rightarrow m\angle A'B'C' = m\angle B$

ସେହିପରି ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇପାରେ ଯେ, $m\angle A'C'B' = m\angle C$ ଏବଂ $m\angle B'A'C' = m\angle A$

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 6 (e)

1. ΔABC ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର BC = 6 ସେ.ମି., $m\angle BAC = 60^0$ ଏବଂ $\overline{AD}$ ମଧ୍ୟମାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 4.5 ସେ.ମି. । ΔABCର ଏକ ସଦୃଶ ତ୍ରିଭୁଜ 3.5 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତରେ ଅନ୍ତର୍ଲିଖନ କର ।

2. ΔABC ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର BC = 6 ସେ.ମି., $m\angle B = 60^0$ ଏବଂ $\overline{AD}$ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 4.5 ସେ.ମି. । ΔABCର ଏକ ସଦୃଶ ତ୍ରିଭୁଜ 2.5 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତରେ ପରିଲିଖନ କର ।

3. କୌଣସି Δ XYZ ଅଙ୍କନ କର । Δ XYZ ର ସଦୃଶ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ଦତ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନୁରୂପ ବାହୁର ଦୁଇ ତୃତୀୟାଂଶ ହେବ ।

4. Δ ABC ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର BC = 5.7 ସେ.ମି., $m\angle B = 60^0$ ଏବଂ $\overline{BE}$ ମଧ୍ୟମାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 4.8 ସେ.ମି. । ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କରି 2.3 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବୃତ୍ତରେ ପରିଲିଖନ କର ।

5. Δ ABC ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର BC = 5.3 ସେ.ମି., $m\angle B = 60^0$ ଏବଂ $m\angle C = 45^0$ । 2.5 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବୃତ୍ତରେ Δ ABCର ଏକ ସଦୃଶ ତ୍ରିଭୁଜ ଅନ୍ତର୍ଲିଖନ କର।

6. Δ ABC ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର BC = 7 ସେ.ମି., $m\angle B = 60^0$ ଏବଂ b+c = 11.2 ସେ.ମି. । ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କରି ଏହାର ସଦୃଶକୋଣୀ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜ 1.5 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବୃତ୍ତରେ ପରିଲିଖନ କର ।

7. Δ ABC ଅଙ୍କନ କର ଯାହାର $m\angle A = 75^0$, AC = 9 ସେ.ମି., AB = 6 ସେ.ମି. । ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କନ କରି ଏହାର ଏକ ସଦୃଶକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ 2 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବୃତ୍ତରେ ଅନ୍ତର୍ଲିଖନ କର ।

ଉତ୍ତରମାଳା

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1(a)

1.(a)(i) 4.5 ସେ.ମି., (ii) 10.5; (b) (i) $\frac{2}{3}$, (ii) ଦୁଇ; 5.(i) BD = 1.5 ସେ.ମି., AB = 4.5 ସେ.ମି.,

(ii) 6 ସେ.ମି., 4 ସେ.ମି., (iii) 3.6 ସେ.ମି.

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1(b)

1. AB : AC; 2. AD = 2 ସେ.ମି., CD = 8 ସେ.ମି.

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1 (c)

1.(i) 12.5, (ii)16 (iii) 108, (iv) 4:7, (v) 4:5, (vi) 70^0, (vii) ΔEOD, (viii) AEC (ix) AC^2, (x)6

2.(i) y^0, $180^0 - (x+y)^0$, x^0, $180^0 - (x+y)^0$; (ii) 45 ବ.ସେ.ମି.(iii) 3:1, (iv) 18 ବ.ସେ.ମି, (v) 15 ସେ.ମି, 21 ସେ.ମି., 27 ସେ.ମି.,(vi) $\frac{40}{3}$ ବ.ସେ.ମି.(vii)144 ବ.ସେ.ମି; 9. 100 ବ.ସେ.ମି; 24. 1:2

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1 (d)

1.(i) m$\angle$DCB, (ii)(a) AC, (b) DC, (c) AD; 2. (i) 30 ସେ.ମି., (ii) 12 ସେ.ମି., (iii) 7 ସେ.ମି., (iv) 9 ସେ.ମି, (v) $\frac{64}{17}$, $\frac{225}{17}$; 3.(i) 9 ସେ.ମି, (ii) 13.5 ସେ.ମି, (iii) $3\sqrt{13}$ ସେ.ମି, (iv) $4.5\sqrt{13}$ ସେ.ମି, (v) $2\sqrt{13}$ ସେ.ମି.

ଅନୁଶୀଳନୀ - 2(a)

1. ଠିକ୍ ଉକ୍ତି; (ii), (iii), (v), (vi), (viii), (x) ଅବଶିଷ୍ଟ ଭୁଲ୍ ଉକ୍ତି ।
2.(i) d, (ii) d, (iii) b (iv) d, (v) a; 3. 4 ସେ.ମି.; 10. 6 ସେ.ମି.; 11. 16 ସେ.ମି., $4\sqrt{21}$ ସେ.ମି.

ଅନୁଶୀଳନୀ - 2(b)

1. ଭୁଲ୍ ଉକ୍ତି; (ii)(iv), (v), (vii), (viii) ଓ (x), ଅବଶିଷ୍ଟ ଠିକ୍ ଉକ୍ତି । 2.(i) 180^0, (ii) 120^0, (iii) 70^0 (iv) $\overset{\frown}{BC}$,(v) 60^0,(vi) 40^0, (vii) ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସ(viii) $\overset{\frown}{BCD}$ (ix)180^0 (x) $\sqrt{2}$:1; 2.(ii)60^0(viii)ବ୍ୟାସ
3.(i) $\overset{\frown}{ABC}$, (ii) $\overset{\frown}{ADC}$, (iii) $\overset{\frown}{BFC}$ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ, $\overset{\frown}{BAC}$ ବୃହତ୍ ଚାପ, (iv)$\angle$BOC, (v) $\overset{\frown}{AEB}$ ଏବଂ $\overset{\frown}{BFC}$, (vi) $\overset{\frown}{BE}$ ଓ $\overset{\frown}{ED}$, (vii) ଏପରି ଅସଂଖ୍ୟ ବିନ୍ଦୁଅଛି, ହଁ, ନାହିଁ; 4.(i) ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମକୋଣ, (ii) ସର୍ବସମ ଚାପ,

(iii) ଆୟତଚିତ୍ର, 5. (i) $80^0, 45^0$ ଓ 55^0 (ii) $80^0, 45^0$ ଓ 55^0 , (iii) ସଦୃଶ; 7.(d) 35^0 ;
8. (i) 70^0 (ii) 220^0 (iii) 280^0 (iv) ସର୍ବସମ ଚାପ; 9.(i) 130^0 , (ii) 240^0, (iii) 290^0

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3

1. (i) 90^0, (ii) ସ୍ଥୂଳକୋଣ, (iii) 90^0, (iv)(a) $\angle YOP$, (b) $\angle XPO$, (v) OP, (vi) 12, (vii) $\sqrt{t^2 + r^2}$,

(viii) 2,1, (ix) 1,0, (x) 2,2, (xi) 0, 0, (xii) 70^0, (xiii) 16, (xiv) ସମଷ୍ଟି, (xv) ଅନ୍ତର, (xvi) ଅସଂଖ୍ୟ

3. 15 ସେ.ମି., 4. 15 ସେ.ମି.; 5. 8 ସେ.ମି.; 6. (ii) 12 ସେ.ମି., (iii) 12 ସେ.ମି.;

7.(i) $30^0, 35^0, 85^0, 65^0$; (iii) 10 ସେ.ମି., (iv) 12 ସେ.ମି., (v) 12 ସେ.ମି.; 29. 12 ସେ.ମି.,10 ସେ.ମି.

ଅନୁଶୀଳନୀ - 4(a)

1. (a) $\cos 10^0$, (b) $\sin 25^0$, (c) 0, (d) 0, (e) 0, (f) 0, (g) $\sin 180^0$, (h) 0, (i) 0, (j) 0;

2.(i) $\cos21^0$, (ii) $-\cos58^0$, (iii) $-\cot 9^0$, (iv) $-\tan11^0$, (v) $\cos1^0$, (vi) $\sec3^0$, (vii) $-\sin38^0$, (viiii) $\text{cosec } 48^0$, (ix) $-\tan41^0$

3. (i) $\sin5^0 - \tan5^0$ (ii) $\cos15^0 + \cot15^0$ (iii) $\tan25^0 + \cot41^0$

4. (i) 1, (ii) 1, (iii)1, (iv) 1, (v) –1

5. (i) 0, (ii) 0, (iii)1, (iv) 0, (v) 0, (vi) 2, (vii) 1, (viii) 1, (ix) 1, (x) 1

6. (i) 1, (ii) 1, (iii) 1, (iv) 1, (v) $\frac{1}{2}$ (vi) 0 (vii) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

9. (i) 1, (ii) $\frac{1}{\sqrt{3}}$, (iii) 1; 11. (i) –1, (ii) $\frac{\sin^3 A}{\cos^2 A}$; 14. 1; 15. 0

ଅନୁଶୀଳନୀ - 4(b)

1. (i) sec B, cosec B, (ii) $2 \cos\theta \cdot \cos \alpha$, (iii) $\cos(60^0 + A)$, (iv) cos A, (v) cos(A–B), (vi)1

6. $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$; 7.(i) $\frac{140}{221}$, (ii) 45^0, (iii) 1; 12. (i) $90^0, 45^0$, (ii) $75^0, 45^0$, (iii) $45^0, 15^0$, (iv) $90^0, 45^0$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 4(c)

1. 69.28 ମି.; 2. 46.76 ମି.; 3. 15.86 ମି.; 4. 6 ମି.; 5. 22.3 ମି.; 6. 25.98 ମି.; 7. 200 ମି.; 8. 56.78 ମି.; 9. $10\sqrt{2}$ ମି.; 10. 22.5 ମି.; 11. 27.32 ମି.; 12. 27.71 ମି.; 13. 81.96 ମି.; 14. $3\sqrt{2}$ ମି.; 15. 21.96 ମି.; 16. 20.78 ମି.

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5(a)

1.(a) (i) $67\frac{6}{7}$ ସେ.ମି.; (ii) 17.6 ମି.; (iii) 88 ସେ.ମି.; (iv) 26.4 ସେ.ମି.;

(b) $5\frac{5}{9}$ ସେ.ମି.; (ii) $166\frac{2}{3}$ ସେ.ମି.; (iii) 4 ସେ.ମି.; (iv) 2.5 ସେ.ମି.;

2. (a) 44 ସେ.ମି., (b) 84 ମି., (c) 280 ଡେ.ମି.; 3. (a) 60^0, (b) 4.4 ସେ.ମି., (c) 63 ସେ.ମି.;

(d) $\frac{360y}{2\pi z}$, (e) $a = \pi\sqrt{2}$

4. 39380 କି.ମି., 5. 140 ଟି; 6. 7 ମି.; 7. 264 ମି., 220 ମି.; 8. 7 ସେ.ମି.; 9. $5\sqrt{10}$ ମି.

10. 250ଥର; 11. 6336 ମି; 12. 88 ମି., 28 ମି.; 13. 112 ମି.; 14. 8 ମି. 48 ସେ.; 15. 28 ମି.;

16. 63 ଡେ.ମି; 17. 62.8 ସେ.ମି., 18. $88\sqrt{3}$ ସେ.ମି., $44\sqrt{3}$ ସେ.ମି.; 19.(a) 60^0, (b) 20 ସେ.ମି.,

20. 17.854 ସେ.ମି.; 21. 3 : 2; 22. 14 ସେ.ମି.; 23. 40 ସେ.ମି.; 24. $2\sqrt{3}$ ସେ.ମି.;

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5(b)

1.(i) 3118.5 ବ.ମି.; (ii) 9856 ବ.ସେ.ମି.; (iii) 6506.5 ବ.ସେ.ମି.; (iv) 616 ବ.ମି.;

2. (i) 14 ମି., (ii) 308 ମି.; 3.(i) $821\frac{1}{3}$ ବ.ସେ.ମି.; (ii) $2200\frac{11}{12}$ ବ.ମି., (iii) 1134 ବ.ମି.,

(iv) 1782 କି.ମି.; 4.(i) 42 ମି., (ii) 80 ମି.; 5.(i) 70^0 , (ii) 135^0, (iii) 60^0 ;

6. (i) 1000 ବ.ମି., (ii) 600 ବ.ସେ.ମି., 7.(i) $2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$ ଏକକ; (ii) $\sqrt{\frac{2x}{\pi}}$ ଏକକ; (iii) $\sqrt{\frac{3x}{\pi}}$ ଏକକ

8. 70 ସେ.ମି.; 9. 2 : $\sqrt{\pi}$; 10. 15 ସେ.ମି.; 11. 2 ଏକକ; 12. $\frac{\sqrt{c}}{2}$ ଏକକ; 13. $\frac{\sqrt{c}}{2}$ ଏକକ; 14. 7546 ବ.ସେ.ମି., 15. 308 ବ.ମି.; 16. 79.92 ଟଙ୍କା; 17. 1078 ବ.ସେ.ମି.; 18. 4 ମି; 19. 21 ସେ.ମି., 14 ସେ.ମି.; 20. 616 ବ.ସେ.ମି.; 21. 550 ବ.ସେ.ମି.; 22. 616 ବ.ସେ.ମି.; 23. $42\sqrt{3}$ ସେ.ମି.; 24. 3 ବ.ସେ.ମି.; 25. 14 ମି.; 26. 7.84 ବ.ସେ.ମି.; 27. 5 ସେ.ମି.; 28. (i) 9 ଏକକ, (ii) 3:2; 29.(i) 5.7 ବ.ସେ.ମି., (ii) 18.24; 30. 182.36 ବ.ସେ.ମି.; 31. 61.4 ବ.ସେ.ମି.

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5(c)

1.(a) 480 ବ.ସେ.ମି., 528 ବ.ସେ.ମି., (b) 128 ବ.ମି., 152 ବ.ମି., (c) 756 ମି., 864 ବ.ମି.;
2. (a) 6828 ବ.ମି., 8428 ବ.ମି., (b) 720 ବ.ଡେ.ମି., 907.056 ବ.ଡେ.ମି., (c) 1200 ବ.ସେ.ମି., 1421.7 ବ.ସେ.ମି.; 3. 20 ସେ.ମି., 1008 ବ.ସେ.ମି.; 4. 3 ସେ.ମି.; 5. 1056 ବ.ମି.;

6. 20 ସେ.ମି., 21 ସେ.ମି., 7.(a) 180 ବ.ମି.; (b) 1150 ବ.ସେ.ମି.; (c) 10 ମି.
8. 2592 ବ.ସେ.ମି.; 9. 25 ସେ.ମି., 1218 ବ.ସେ.ମି.; 10. 3 ସେ.ମି.;
11(a) 1056 ବ.ସେ.ମି., (b) 21 ମି., (c) 7524 ବ.ସେ.ମି.; 12. 750 ଥର; 13. $2\frac{1}{3}$ ମି.; 14. 30 ମି;
15. 2 ସେ.ମି.

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5(d)

1. 6300 ଘ.ମି.; 2. 448 ଘ.ସେ.ମି.; 3. 30 ମି., 1680 ବ.ମି.; 4. 6 ସେ.ମି., 8 ସେ.ମି.; 5. 8 ସେ.ମି.;
6. 84 ବ.ମି.; 7. $4\sqrt{3}$ ସେ.ମି., 8. 42 ସେ.ମି., 42 ସେ.ମି.; 9. $360\sqrt{3}$ ବ.ମି., 10. 14 ମି.;
11. 14 ଡ଼େ.ମି.; 12. $2\frac{3}{4}$ ମି.; 13. 21 ସେ.ମି.; 14. 385 ବ.ଡ଼େ.ମି.; 15. 1386 ଘ.ସ୍ରେ.ମି.;
16. 3234 ଘ.ସ୍ରେ.ମି.; 17. 15 ସେ.ମି., 13 ସେ.ମି.,

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5(e)

1. (i) 240.24 ବର୍ଗ ସେ.ମି.; 221.76 ବ.ସେ.ମି.; (ii) 392.7 ବ.ସେ.ମି., 346.5 ବ.ସେ.ମି.,
(iii) $471\frac{3}{7}$ ବ.ସେ.ମି., $452\frac{4}{7}$ ବ.ସେ.ମି.; 2. (i) 1155 ଘ.ମି., 478.5 ବ.ମି.; (ii) 4224 ଘ.ମି.,
$1885\frac{5}{7}$ ବ.ମି.;
3. (i) 1386 ବ.ମି., 2310 ବ.ମି., (ii) 1914 ବ୍.ମି.; 4. (i)1232 ଘ.ସେ.ମି., 704. ବ.ସେ.ମି., (ii) 3850
ବ.ସ୍ରେ.ମି., 15, 400 ଘ.ସ୍ରେ.ମି.; 5. 9856 ଘ.ସ୍ରେ.ମି., 2200 ବ.ସେ.ମି.; 6. 2156 ଘ.ସେ.ମି.;
7. (i) 2310 ବ.ସେ.ମି., (ii) 3080 ବ୍.ସେ.ମି.; 8. (i) 3:25 (ii) 3:28, (iii) 5:7;
9. (i) 392.5 ଘ.ମି., (ii) $20940\sqrt{5}$. ଘ.ସେ.ମି., (iii) $768\sqrt{10}$ ଘ.ସେ.ମି.;
10. 2425.5 ଘ.ସେ.ମି., 346.5 $(1+\sqrt{5})$ ବ.ସେ.ମି.; 11. $\frac{2816\sqrt{2}}{21}$ ଘ.ସେ.ମି.;
12. 1.5 ସେ.ମି.; 13. 5830 ବ.ମି.; 14. 163548 ଘ.ମି.; 15. 440;
16. 100π ଘ.ସେ.ମି. ଏବଂ 90π ବ.ସେ.ମି.

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5(f)

1. (i) 5544 ବର୍ଗ ସେ.ମି. ଓ 38808 ଘ.ସେ.ମି.; (ii) 616 ବ.ସେ.ମି. ଓ $1437\frac{1}{3}$ ଘ.ସେ.ମି.,
(iii) 1386 ବ.ସେ.ମି. ଓ 4851 ଘ.ସେ.ମି.; 2. (i) 6 ସେ.ମି., (ii) 9 ସେ.ମି.; (iii) 20 ସେ.ମି.;
3. (i) 27:64, 9:16 (ii) 1:27, 1: 9 (iii) 8: 125, 4 : 25;
4. $113\frac{1}{7}$ ବ.ସେ.ମି.; 5. $1437\frac{1}{3}$ ଘ.ସ୍ରେ.ମି.; 6. 21 ମି.; 7. (i) 729 , (ii) 38.88 ମି.; 8. 19404 ଲି.
9. 3:2:6; 10. 6336 ଗ୍ରାମ୍, 11. $241\sqrt{10}$ ବ.ସେ.ମି.; 12. 30 ସେ.ମି.;
13. (a) 381π ବ.ସେ.ମି., (b) $\frac{542\pi}{3}$ ଘ.ସେ.ମି. ।